SIMMETRIA

"*La bellezza visibile nasce dalla simmetria delle parti: l'una in rapporto all'altra e ciascuna in rapporto all'insieme; dunque la bellezza di tutti gli esseri è la loro simmetria e la loro misura*"

Plotino (203-270)

"*La simmetria è una materia vasta, importante nell'arte e nella natura. La matematica ne è la radice e sarebbe ben difficile trovare un campo migliore in cui dimostrare come operi il pensiero matematico*"

Hermann Weil (1885-1955)

"*La simmetria è l'elemento principe, la fiaccola, che guida il matematico a scoprire le leggi della natura con il puro intelletto, ancor prima che dedurle dai fatti sperimentali*"

Paolo Marani (vivente)

Cos'è la simmetria?

Significato comune

- Dal greco συμμετρια, letteralmente: "***con misura***".
  Per estensione: ***equilibrio fra le parti***, ***armonia di proporzioni***.

Significato geometrico

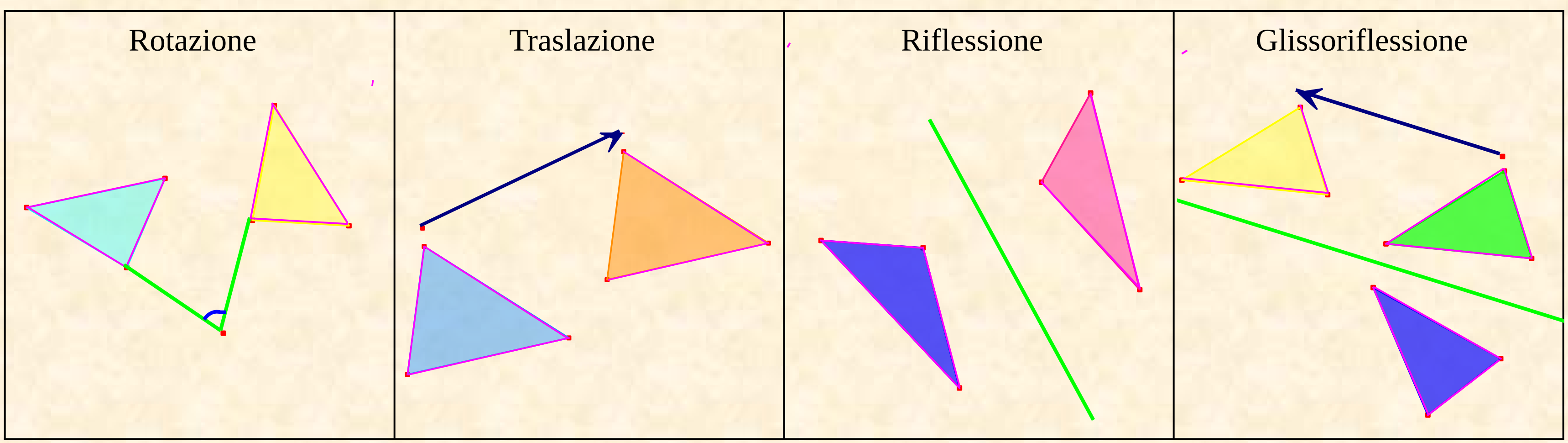
- Possibilità di operare in un sistema un cambiamento tale che, ***dopo l'operazione, il sistema ha esattamente lo stesso aspetto di prima.***

Per operazione di simmetria s'intende ogni *movimento* attraverso cui i punti di un sistema S, vanno a corrispondere con ben determinati punti di S stesso.

SIMMETRIE DEL PIANO

Nel piano ci sono quattro tipi di operazioni di operazioni di simmetria elementari (isometrie):

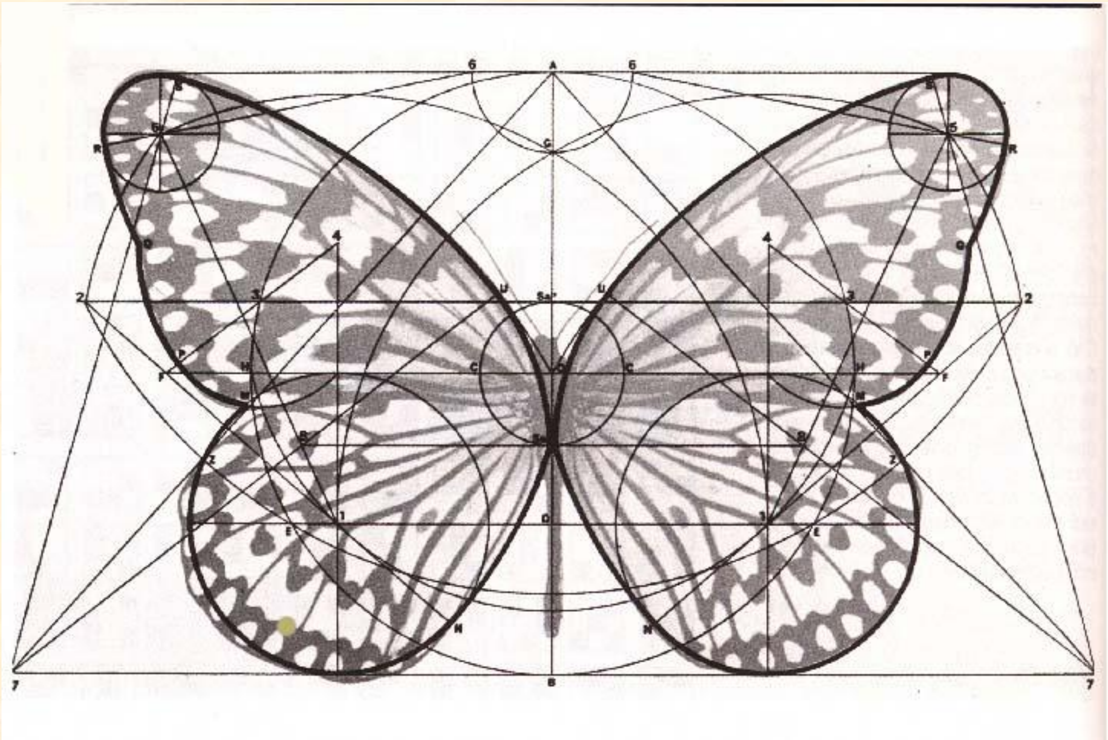
- **Rotazione**
- **Traslazione**
- **Riflessione (o simmetria assiale)**
- **Glissoriflessione**



Simmetria bilaterale

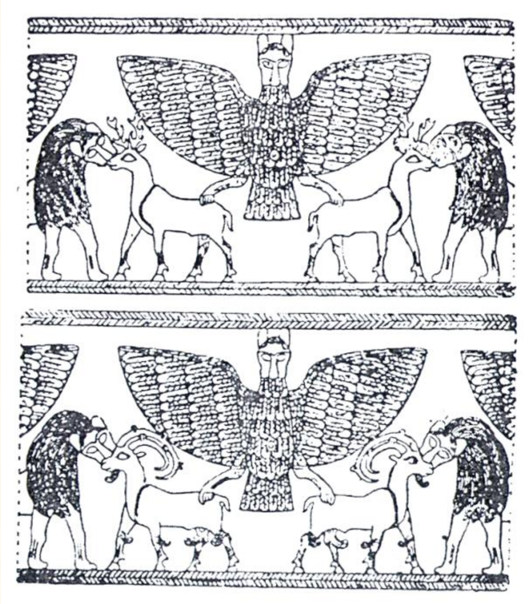
La struttura di quasi tutti gli animali e del corpo umano, introduce il concetto geometrico di **simmetria bilaterale**.

Due figure sono disposte secondo un ordine di simmetria bilaterale se ***sono una l'immagine speculare dell'altra****, in altre parole se possono essere sovrapposte con una rotazione di 180° su un asse.*

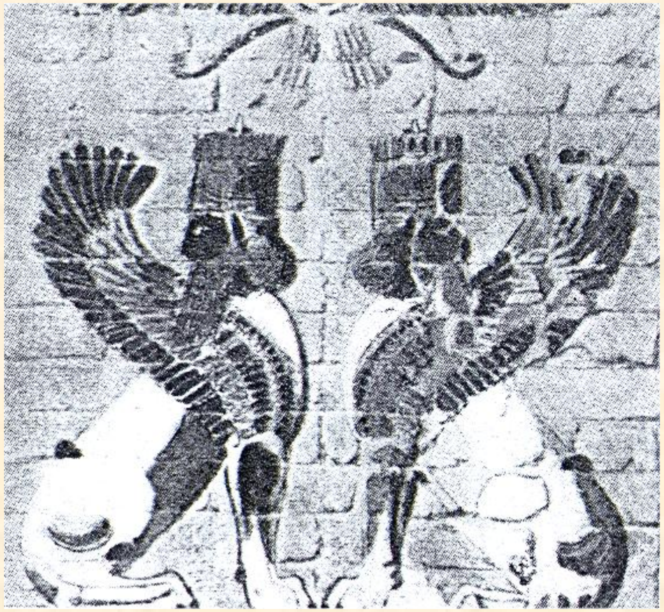


A.Montù, *Costruzione geometrica di farfalla*

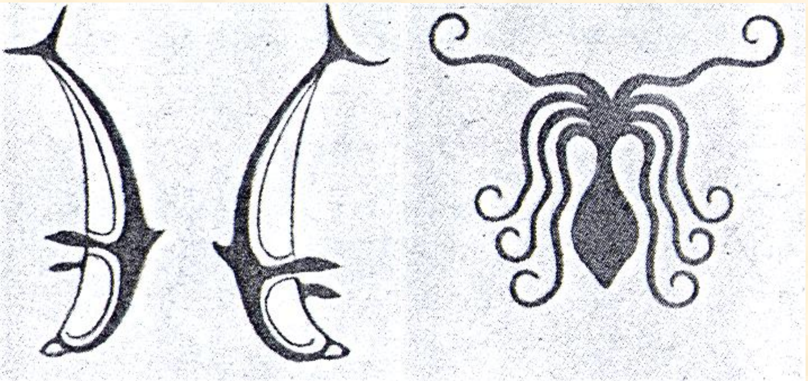
Simmetria bilaterale nelle arti figurative del mondo antico *orientale*



Disegno sumerico su di un vaso d'argento (2700 a.C.)

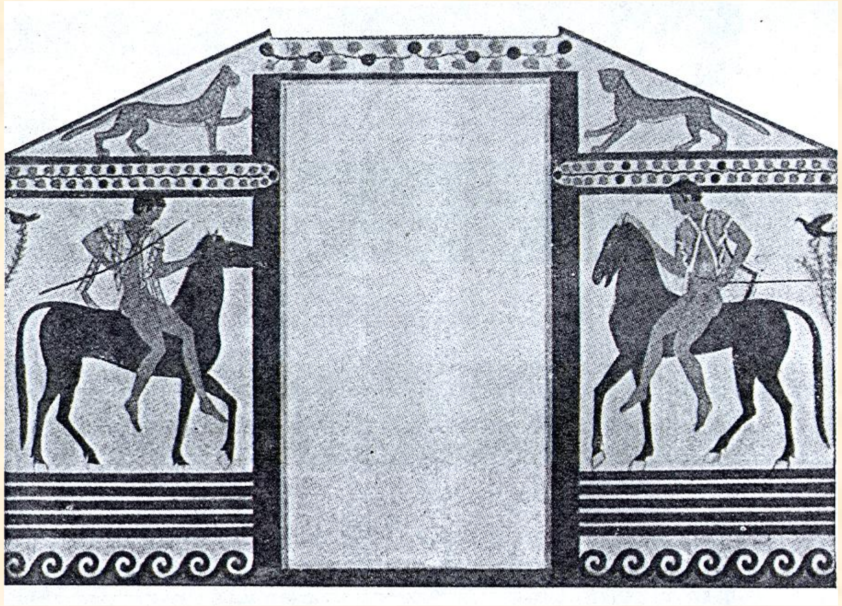


Sfingi in cotto smaltato (Palazzo di Dario), Susa, ca 500 a.C.

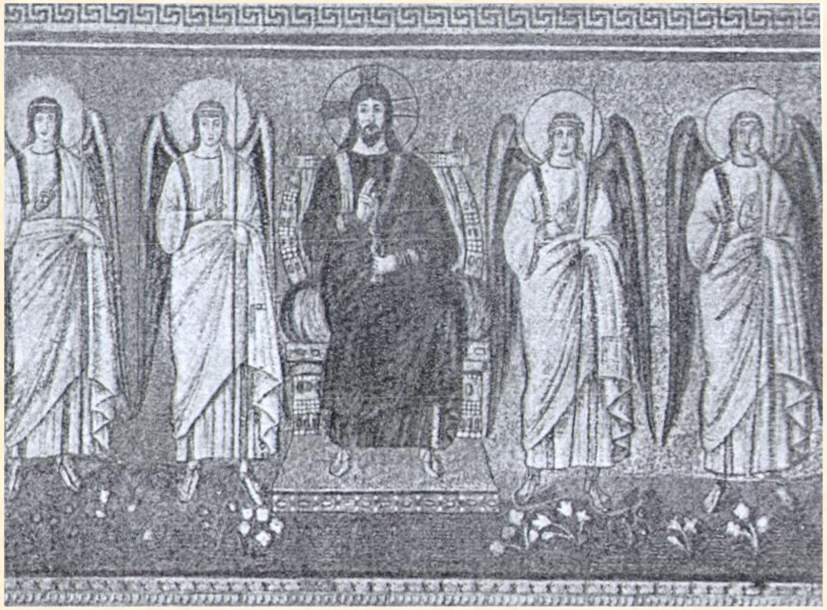


Disegni del pavimento nel Megaron di Tirinto, ca 1200 a.C.

Simmetria bilaterale nelle arti figurative del mondo antico *occidentale*

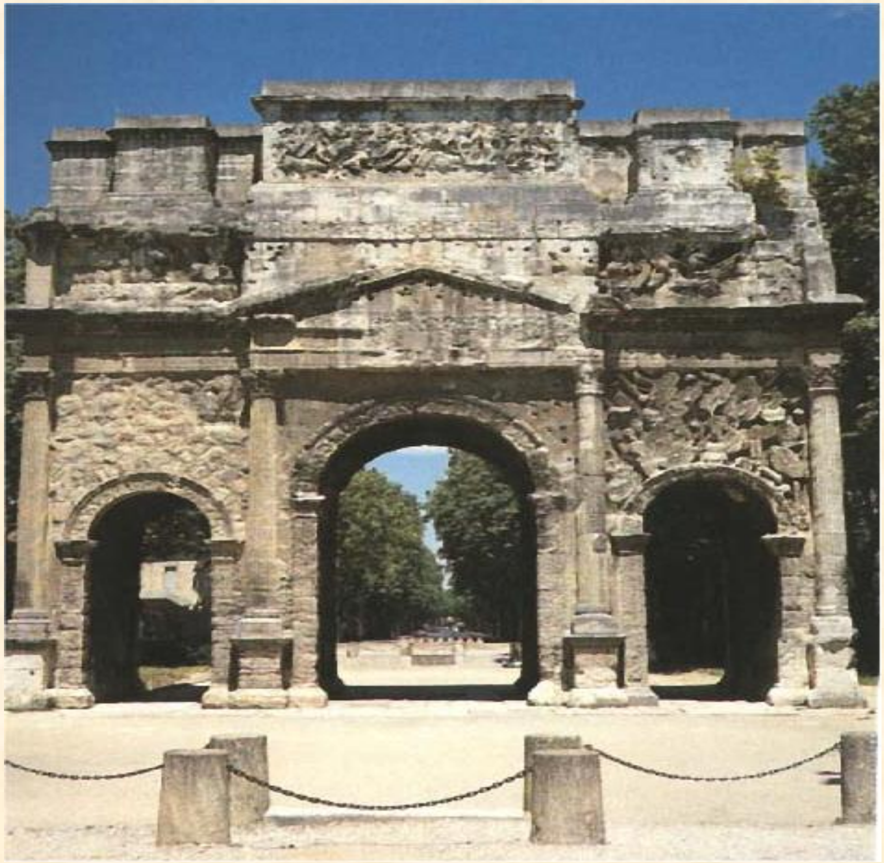


Affresco sulla tomba etrusca del Triclinio *(Corneto)*



Mosaico in Sant'Apollinare *(Ravenna), XII sec.*

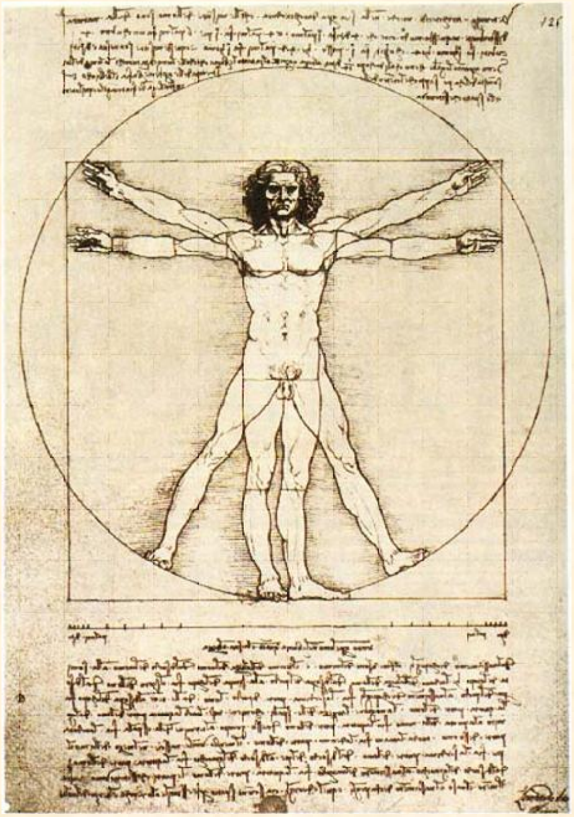
Simmetria bilaterale in *architettura*



"Arco trionfale di Tiberio", *13-47 d.C. ca. Orange, Francia meridionale.*

È simbolo della stabilità dei poteri accentrati

Fino al tardo Rinascimento le arti figurative occidentali optano per l'equilibrio, la regolarità e l'armonia raggiunti attraverso la simmetria bilaterale.



Leonardo Da Vinci
"Uomo vitruviano", 1490

Anonimo, "La città ideale", 1475 ca

Nell'arte orientale la regolarità simmetrica entra in crisi con l'avvento del taoismo e dello Zen dando origine ad un nuovo percorso di elaborazione estetica che si può identificare con l'**introduzione della "diversità" e dell'asimmetria**.

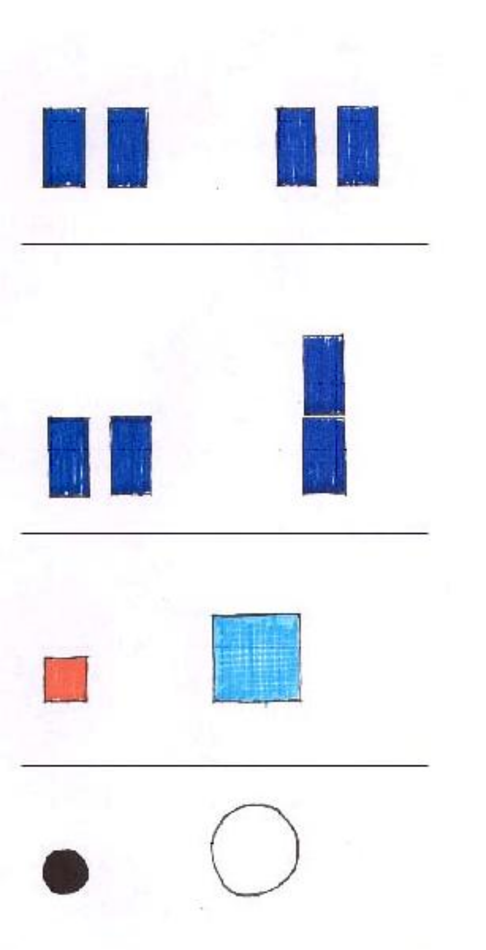
"La vera bellezza è una deliberata, parziale, rottura di simmetria"

(Proverbio Zen)

Ma Yuan,
"Paesaggio al chiaro di luna", *1200 ca*

Nell'arte moderna e contemporanea si opta per il principio compositivo dell'***assialità bilanciata.***

Da un sistema dotato di simmetria bilaterale (a) si passa a sistemi bilanciati nelle forme (b) o nei colori (c) e (d)

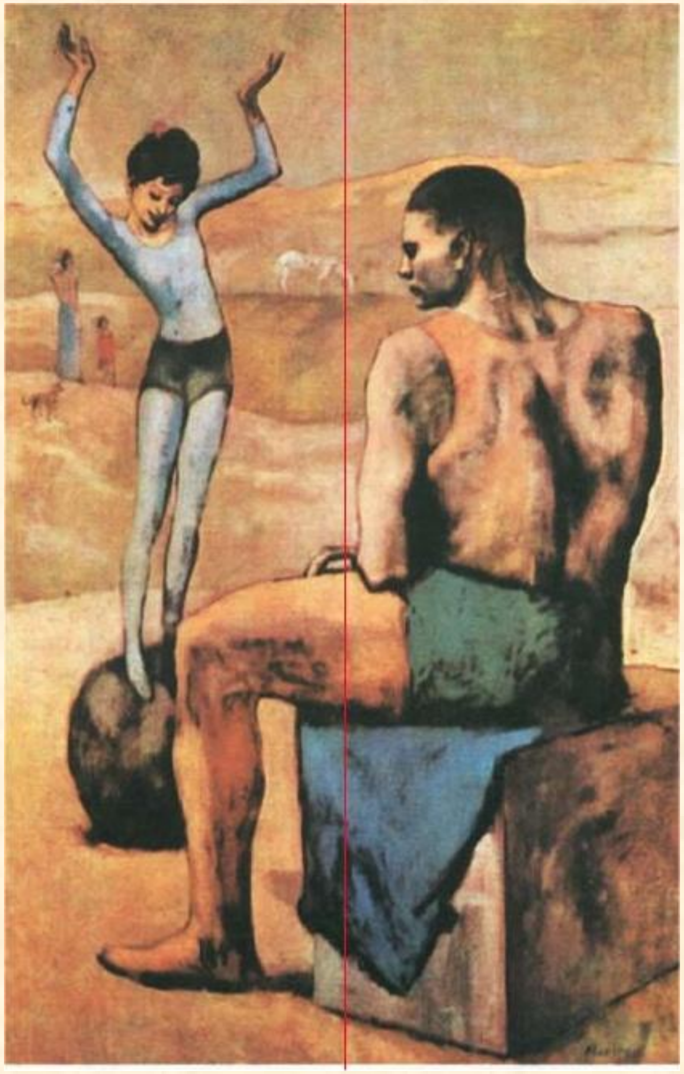


a)

b)

c)

d)

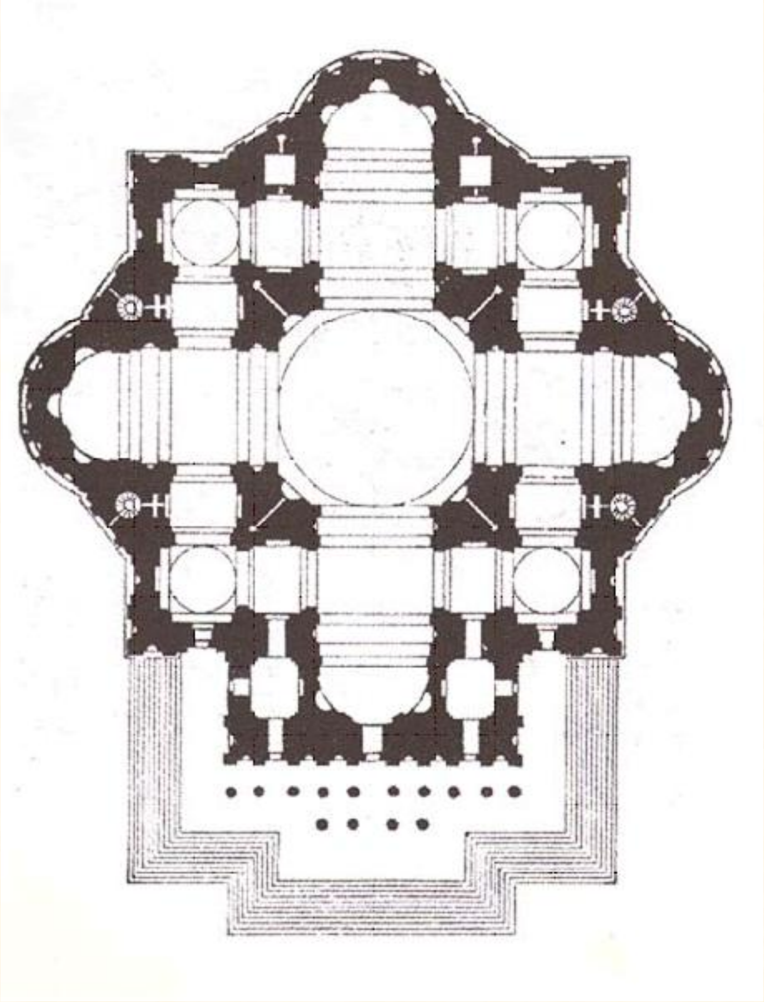


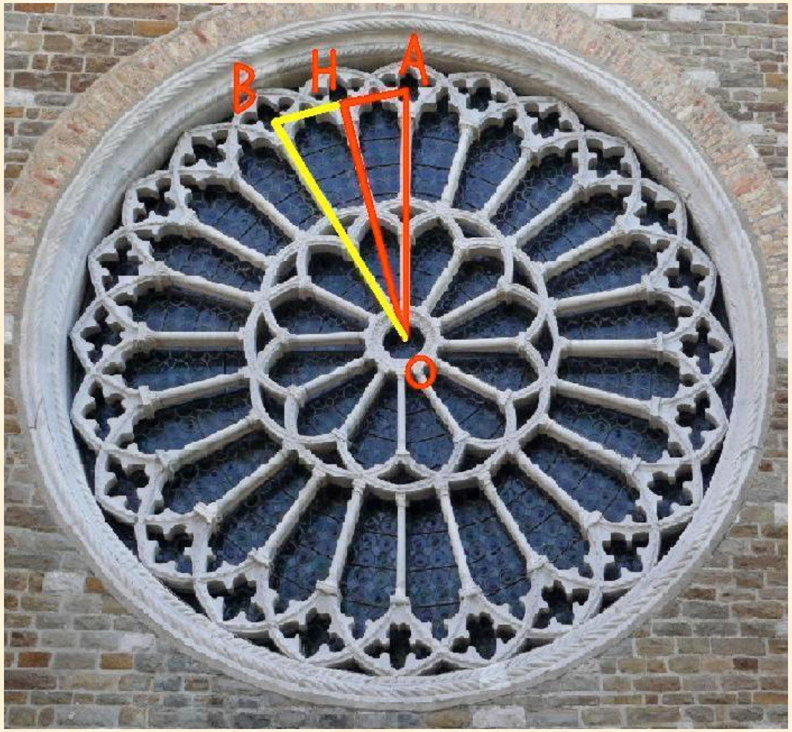
Dividendo idealmente questo dipinto in due metà verticali si evidenzia l’identità fra le parti ottenuta soprattutto dal contrasto cromatico caldo-freddo, chiaro-scuro.

*Pablo Picasso, “**Acrobata e giovane equilibrista**”, 1905, Museo Puskin, Mosca.*

SIMMETRIA ROTAZIONALE

Molti artisti del Rinascimento si sono impegnati nella ricerca di tutte le possibili simmetrie di tipo rotazionale nella progettazione di edifici a pianta centrale.





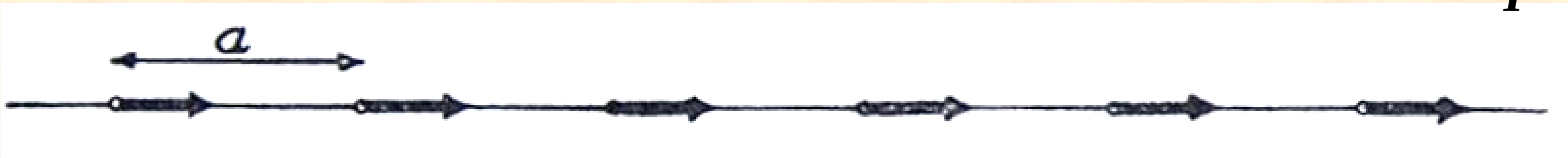
Rosone della Cattedrale di S. Giusto, Trieste

Pianta della Basilica di San Pietro *secondo il progetto di Michelangelo.*

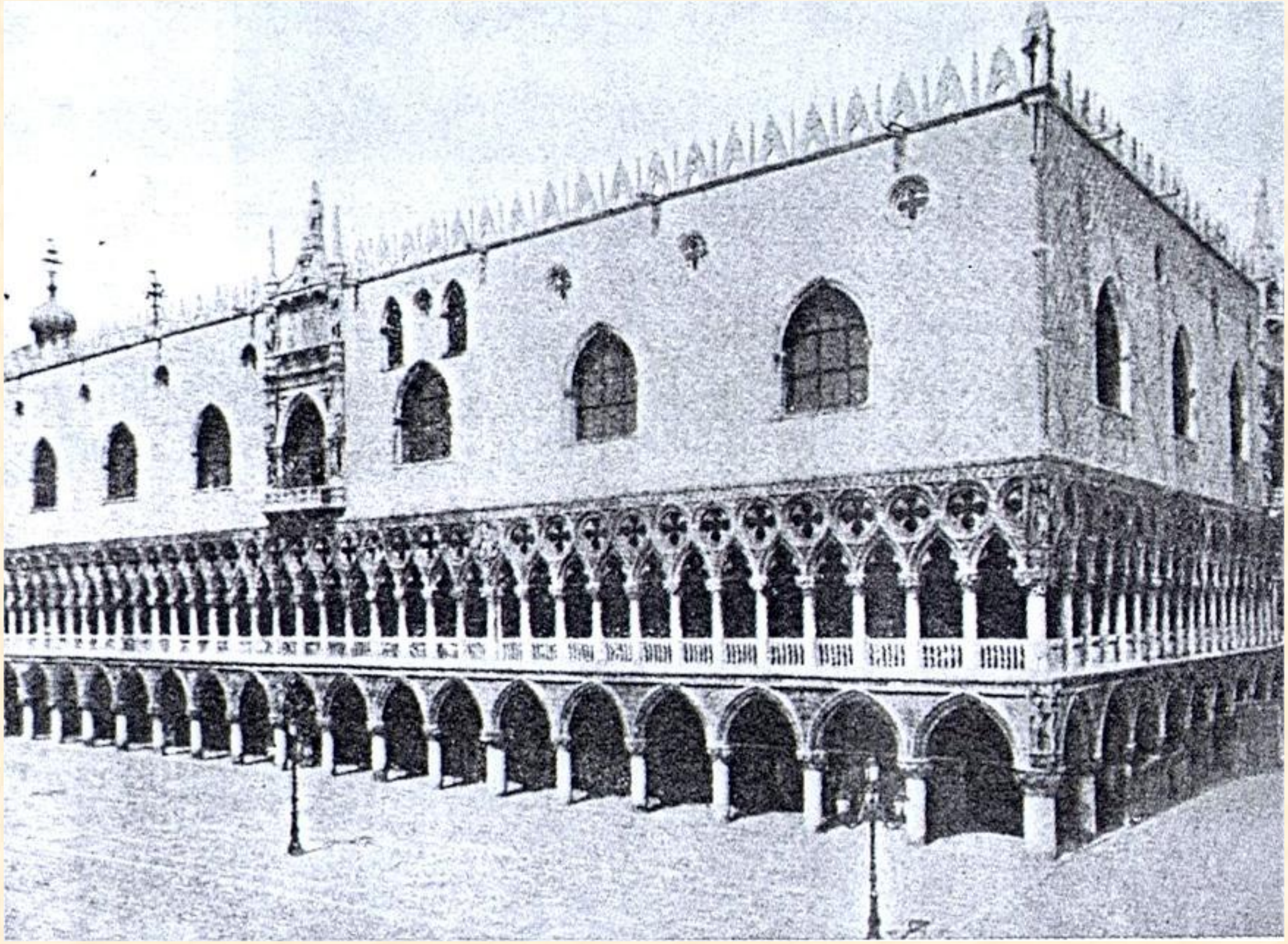
Simmetria traslazionale

Questa simmetria si ottiene mediante lo ***spostamento rettilineo di una figura secondo un ritmo costante prestabilito*** ***(Fig. I)***. Una figura che resti invariata in seguito ad una traslazione è ciò che nell’arte ornamentale si chiama figura a “rapporto infinito”.

I



Simmetria traslazionale in architettura:
Palazzo Ducale di Venezia



Glissoriflessione

La traslazione si può combinare con la simmetria di riflessione parallela al piano stesso della traslazione. In questo caso i centri di riflessione si susseguono ad una distanza pari alla metà del vettore di traslazione.

Tappeto afgano,
risalente al Medio Evo

A partire dagli anni Cinquanta gli artisti della ***Pop Art*** hanno sfruttato la simmetria traslazionale con evidente riferimento alla moltiplicazione e al consumo delle immagini tipiche dell'informazione di massa.

*Andy Warhol, **"Marilyn"** (particolare), 1967, coll. Kimiko and J.Powers, Colorado.*

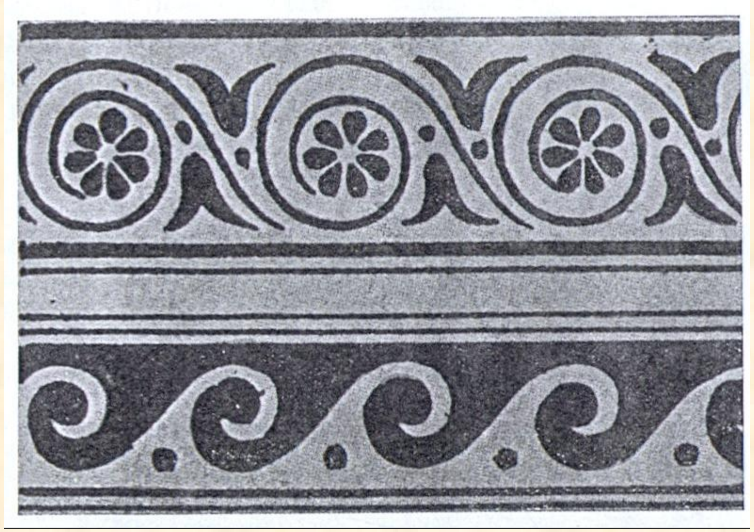
FREGIO

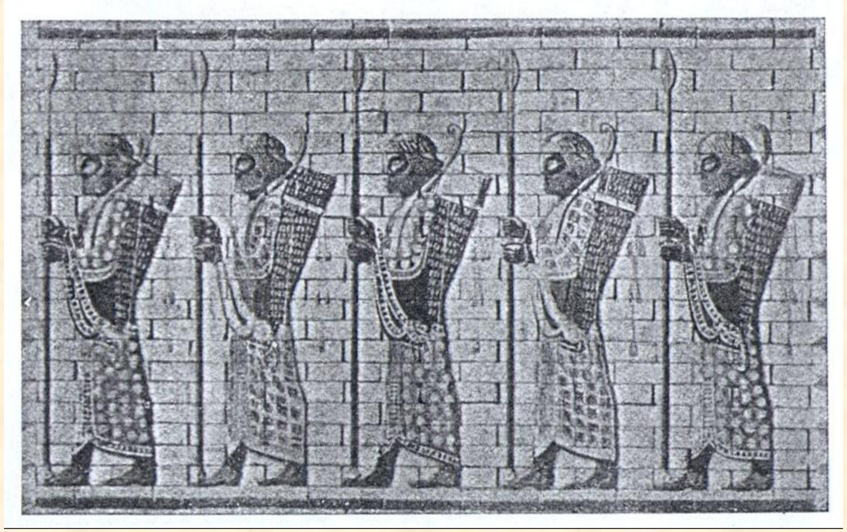
In arte: elemento decorativo di una struttura architettonica, allungato e orizzontale, scolpito o dipinto, di solito recante motivi stilizzati o geometrici

In matematica: striscia di piano che è ricoperta dalle copie ripetute di un motivo “base”. Le copie sono ottenute mediante delle isometrie, una delle quali è necessariamente una traslazione nella direzione della striscia.

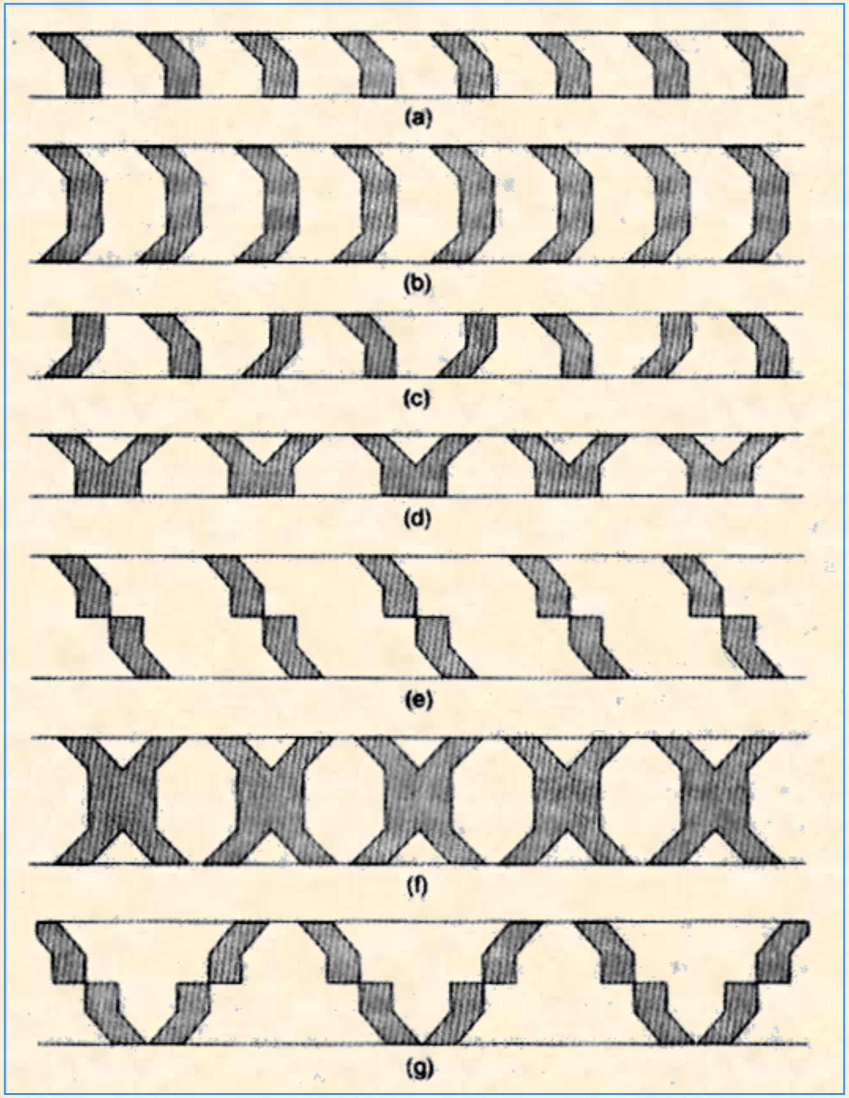
Fregi ornamentali tratti dall'arte greca

traslazione pura





traslazione+riflessione

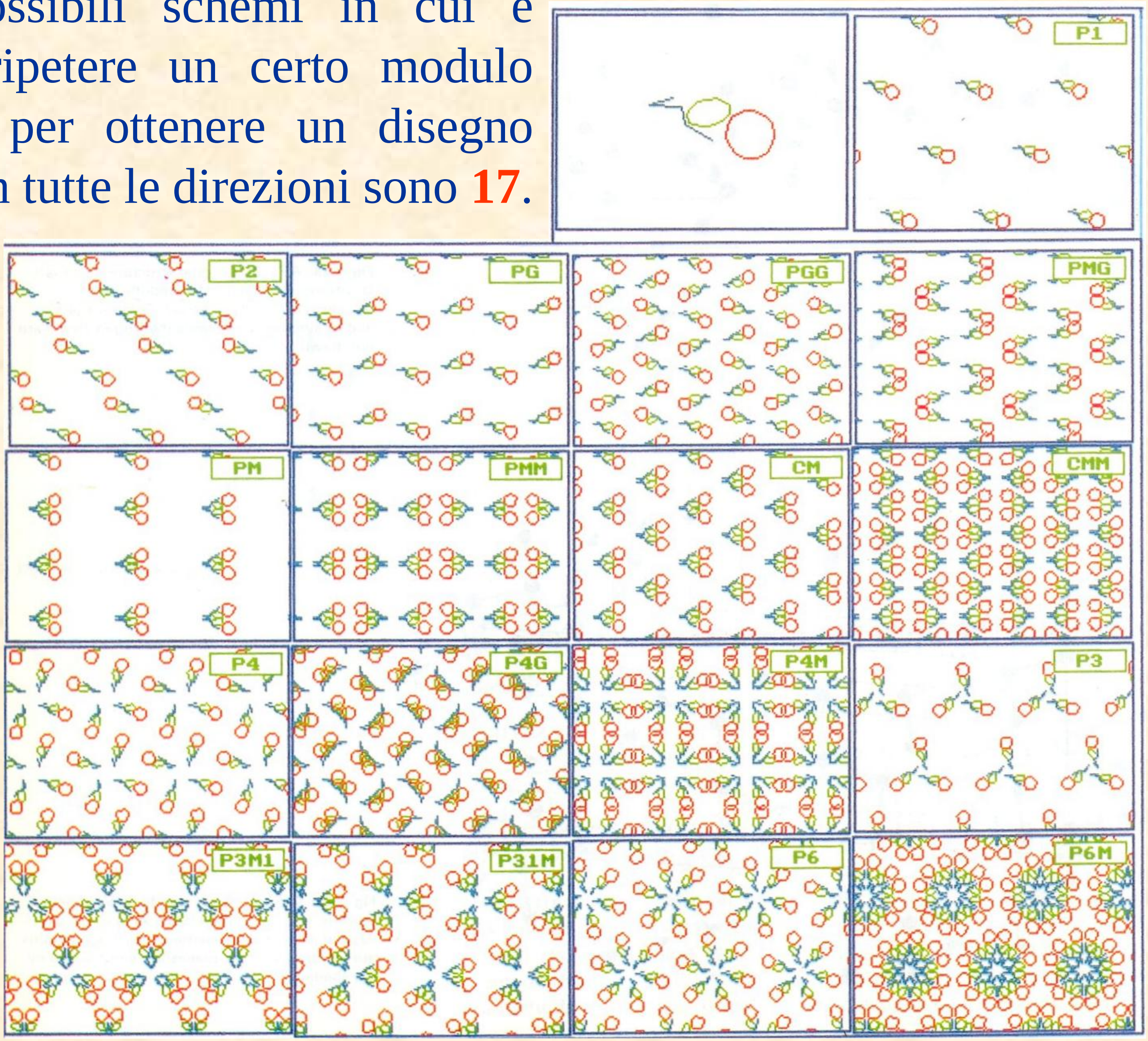


I sette fregi distinti che si possono generare combinando le quattro operazioni fondamentali. Alle lettere corrispondono le combinazioni di tali operazioni.

Le diverse possibilità si creano agendo su un motivo di partenza, che non deve possedere alcuna simmetria, tramite le seguenti operazioni:

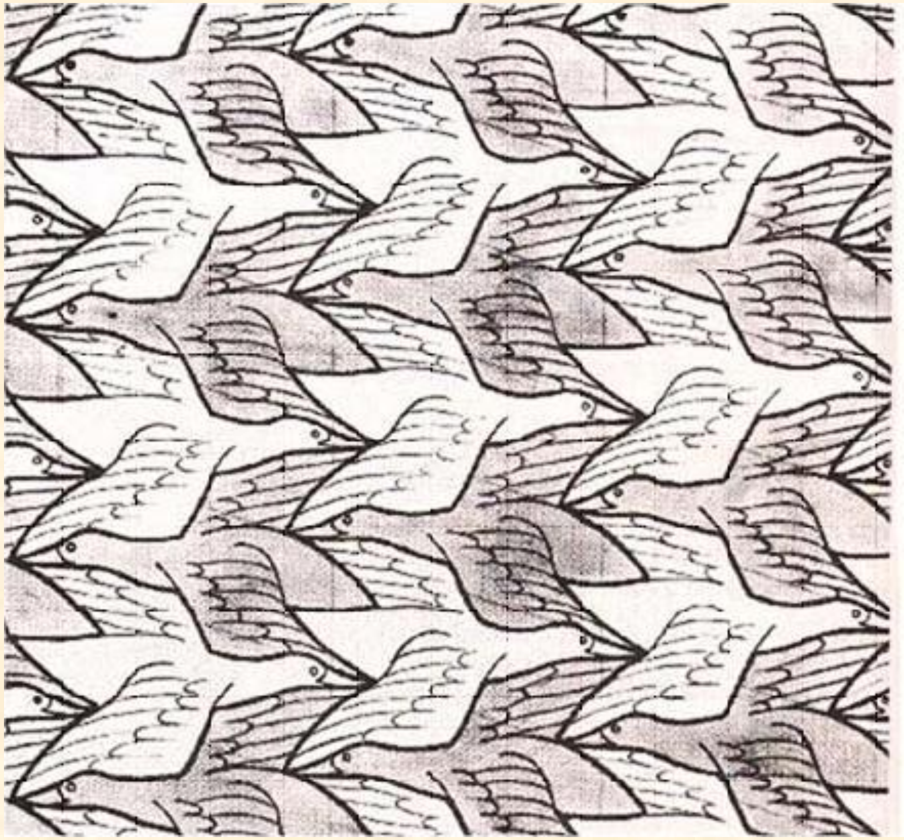
(a) traslazione
(b) riflessione orizzontale +traslazione
(c) riflessione a scorrimento
(d) riflessione verticale
(e) rotazione di 180 gradi
(f) riflessione orizzontale + riflessione verticale
(g) rotazione + riflessione verticale

Tutti i possibili schemi in cui è possibile ripetere un certo modulo nel piano per ottenere un disegno illimitato in tutte le direzioni sono **17**.



Un’interessante applicazione delle simmetrie piane si ha nella tassellazione del piano, ovvero nel suo completo ricoprimento attraverso forme chiuse che non si sovrappongono e non lasciano spazi vuoti.

Nessuno è riuscito in questo meglio di Escher, usando per il ricoprimento motivi geometrici sostituiti poi da angeli, fantasmi, diavoli, rettili, altri animali immaginari in numero e dimensioni tali da creare disegni artistici unici.



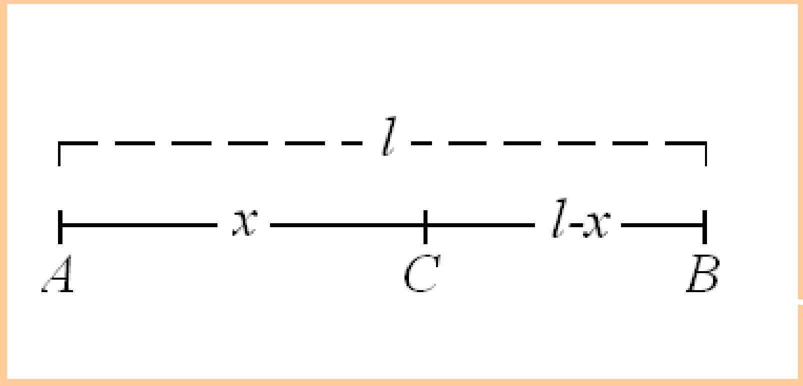
*M.C.Escher, **"Anatre"**, 1945*

Come distinguere in questo quadro lo sfondo dalle figure?

Per approfondire …

SEZIONE AUREA

La sezione aurea di un segmento AB è la parte di tale segmento che è media proporzionale tra l'intero segmento e la parte restante .



divisione del segmento in ragione media ed estrema (Euclide, III secolo a.C.)

Considerato il segmento AB, il segmento AC sarà la sua sezione aurea se:

$$\boxed{\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{BC}}$$

Numero aureo = $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

~1,618033….

L'origine della nozione di sezione aurea è controversa: convenzionalmente è fissata attorno al VI sec. a.C. (scuola pitagorica), ma alcuni sostengono che già nell'antico Egitto e a Babilonia si parlasse di un particolare tipo di rapporto chiamato *rapporto divino* (vedi Piramide di Cheope).

CALCOLO DEL NUMERO AUREO

Posto AB = *l* *e* AC = *x* *riscriviamo la precedente relazione come:*

$$\frac{l}{x}=\frac{x}{l-x}\Rightarrow l^2-lx=x^2\Rightarrow x^2+lx-l^2=0\Rightarrow x=\frac{-l\pm\sqrt{l^2+4l^2}}{2}=\frac{-l\pm l\sqrt{5}}{2}=l\,\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$$

Consideriamo il valore positivo:

$$x=l\,\frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

Quindi risulterà:

$$\frac{x}{l}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}=0,618033\ldots$$

Numero irrazionale come π, ma non trascendente

A questo punto il rapporto cercato sarà:

$$\frac{l}{x}=\frac{2}{\sqrt{5}-1}\cdot\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}+1}=\frac{2\left(\sqrt{5}+1\right)}{5-1}=\frac{\sqrt{5}+1}{2}=1,618033\ldots$$

IL NUMERO AUREO E LA SEQUENZA DI FIBONACCI

La SEQUENZA DI FIBONACCI è una serie ricorsiva che parte dal numero 1.
Ogni elemento successivo è uguale alla somma dei due numeri precedenti:

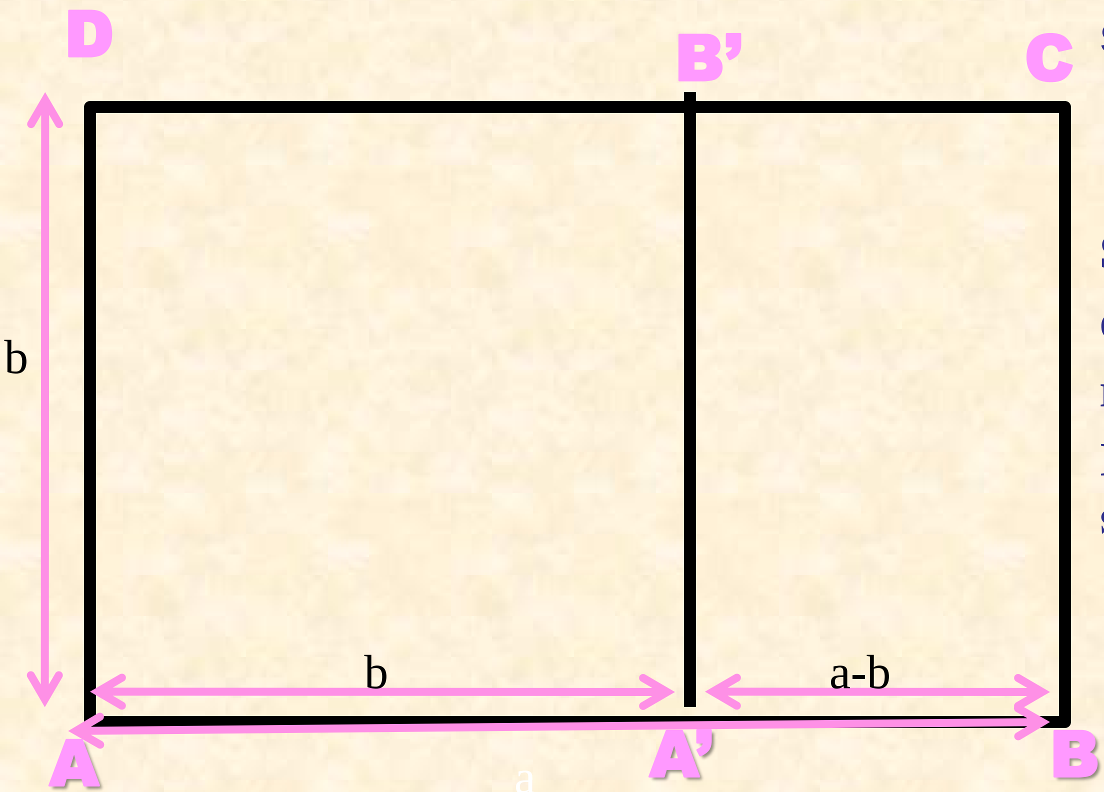
1 1 2 3 5 8 13 21 34 55 ……

Il legame tra la Sequenza di Fibonacci e la Sezione Aurea è dato dal ***rapporto fra due numeri consecutivi.***

Con l'aumentare dei numeri questa divisione tende ad avvicinarsi sempre di più al valore 1,618…..

1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233
	1/1	2/1	3/2	5/3	8/5	13/8	21/13	34/21	55/34	89/55	144/89	233/144
	1	2	1.5	1.666667	1.6	1.625	1.615385	1.619048	1.617647	1.618182	1.61798	1.618056

IL RETTANGOLO AUREO



E' un rettangolo i cui lati a e b sono in proporzione aurea.

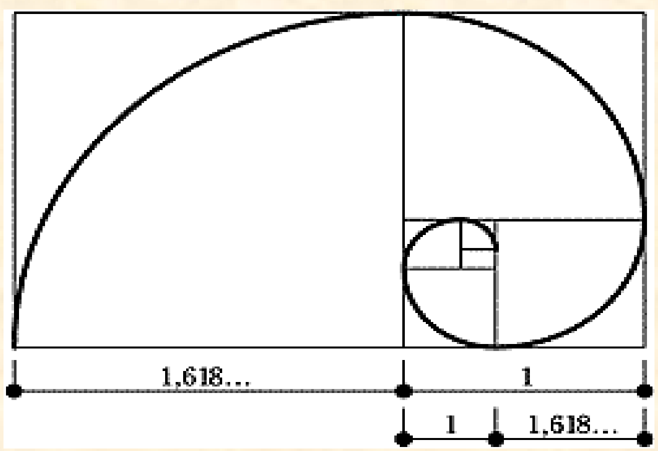
$$\frac{a}{b} = \frac{b}{a-b}$$

Se da questo rettangolo si elimina il quadrato di lato b, si ottiene un altro rettangolo aureo.

Infatti, applicando le proprietà dello scomporre e dell'invertire, si ha:

$$\frac{b}{a-b} = \frac{a-b}{2b-a}$$

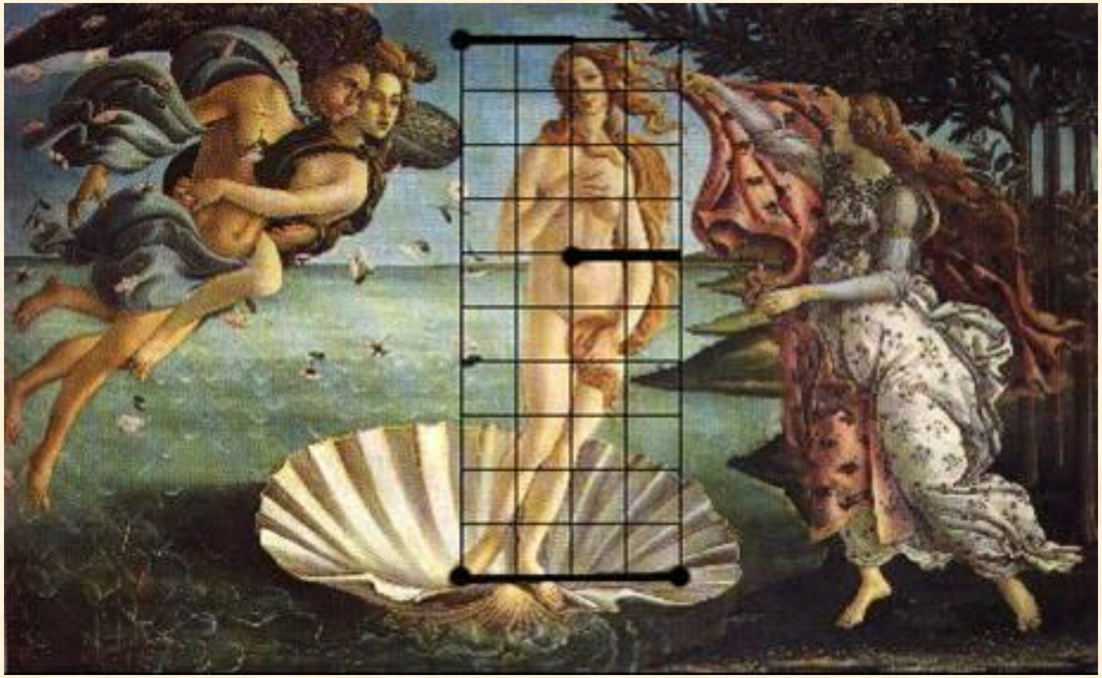
Iterando questa costruzione si ottiene una serie di rettangoli aurei sempre più piccoli e, tracciando un quarto di circonferenza in ogni quadrato scartato, si ottiene una linea che si avvolge su se stessa infinite volte che si chiama SPIRALE AUREA O LOGARITMICA, l'unico tipo di spirale che mantiene sempre la stessa forma quando continua ad allargarsi (autosomiglianza).



PARTENONE (440 – 430 a. C.)

Il Partenone è il più celebre monumento dell'architettura ellenica e contiene molti rettangoli aurei sia nella pianta che nella facciata e le stesse proporzioni auree si riscontrano nelle statue in esso presenti.

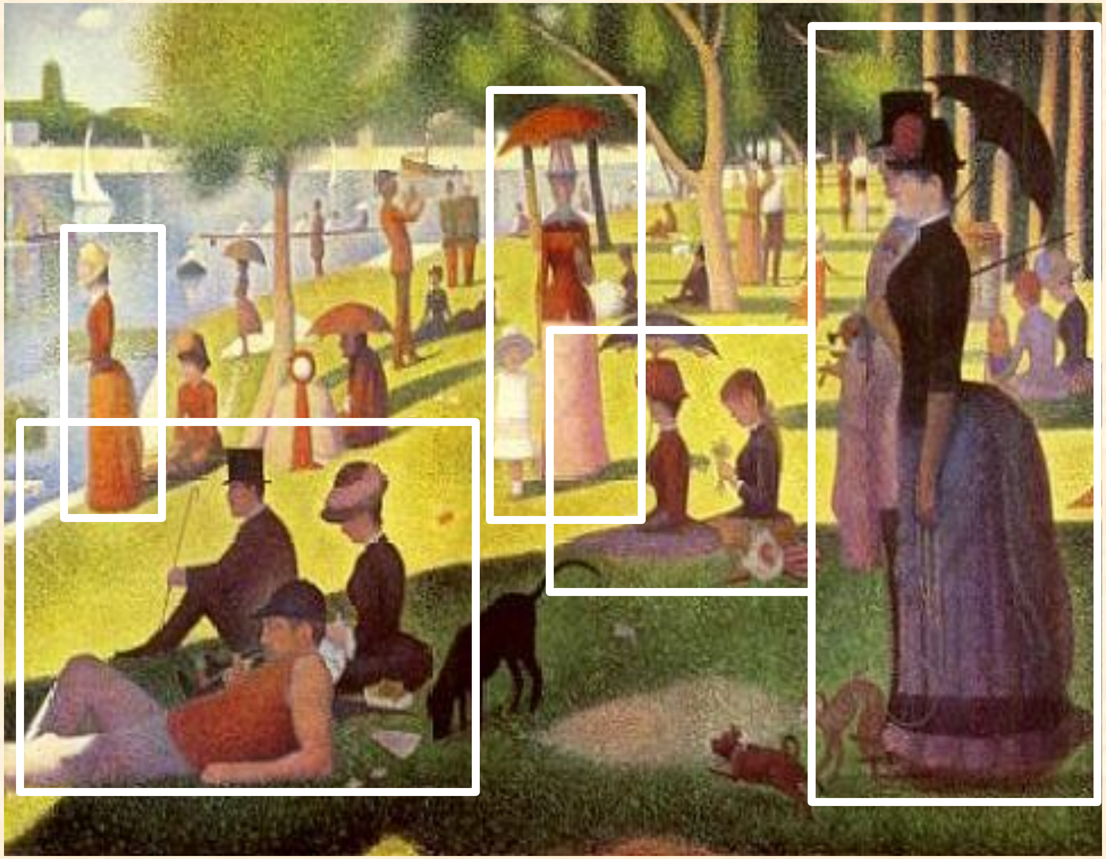
BOTTICELLI



La nascita di Venere (1482-85) - Firenze, Galleria degli Uffizi

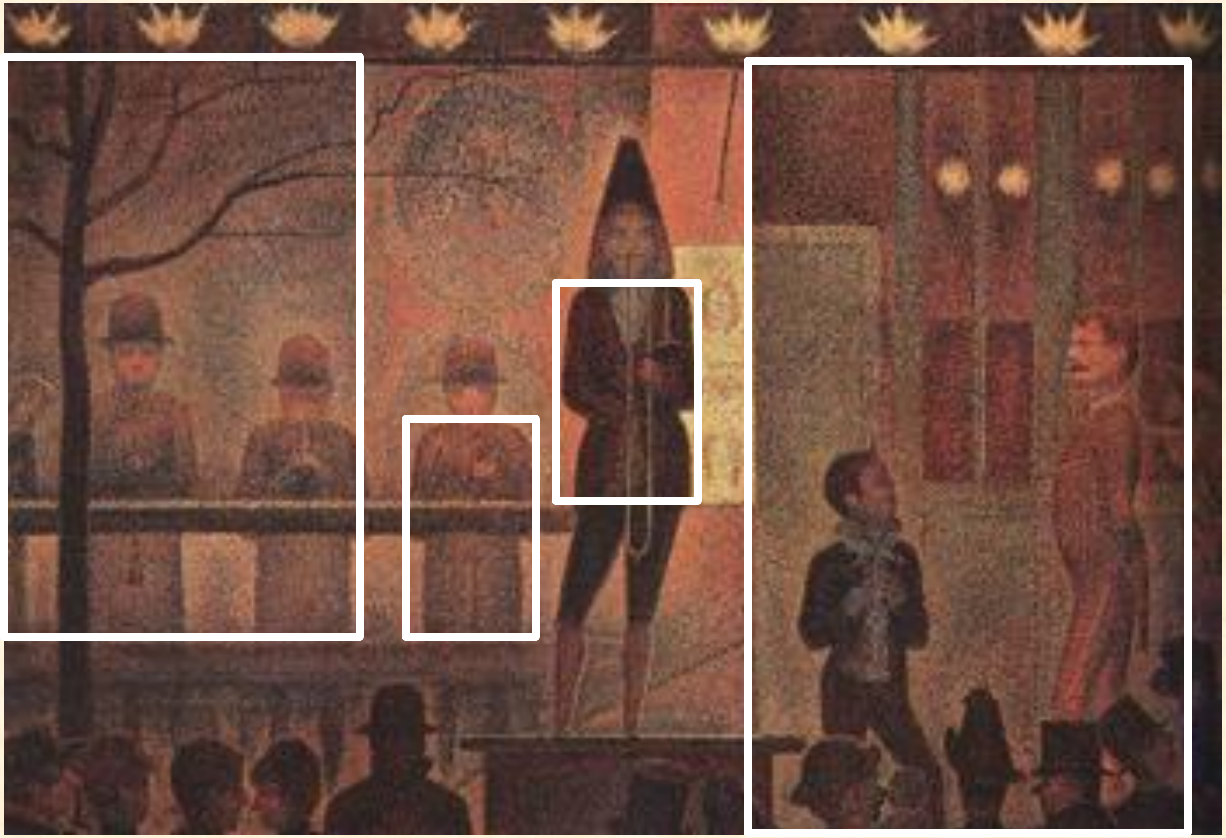
Se misuriamo l'altezza da terra dell'ombelico e la statura della Venere il loro rapporto sarà 0,618.

SEURAT



Domenica pomeriggio alla Grande Jatte (1884-86) Chicago, The Art Institute

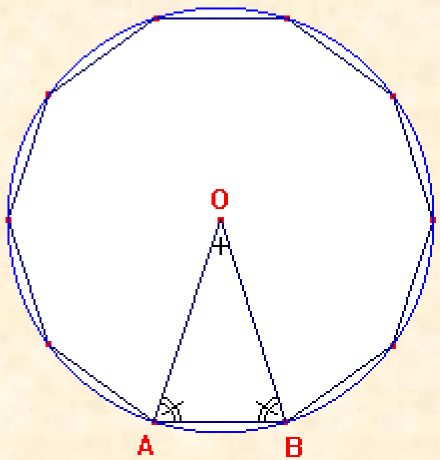
SEURAT



La Parata del circo (1888) - Metropolitan Museum of Art, New York

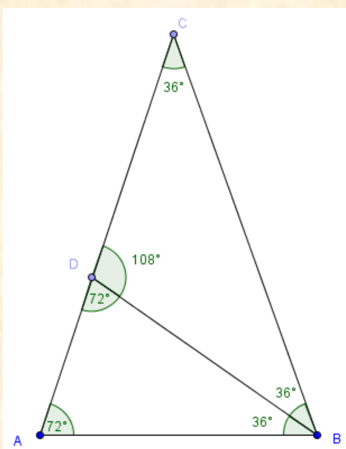
Per approfondire …

DECAGONO REGOLARE



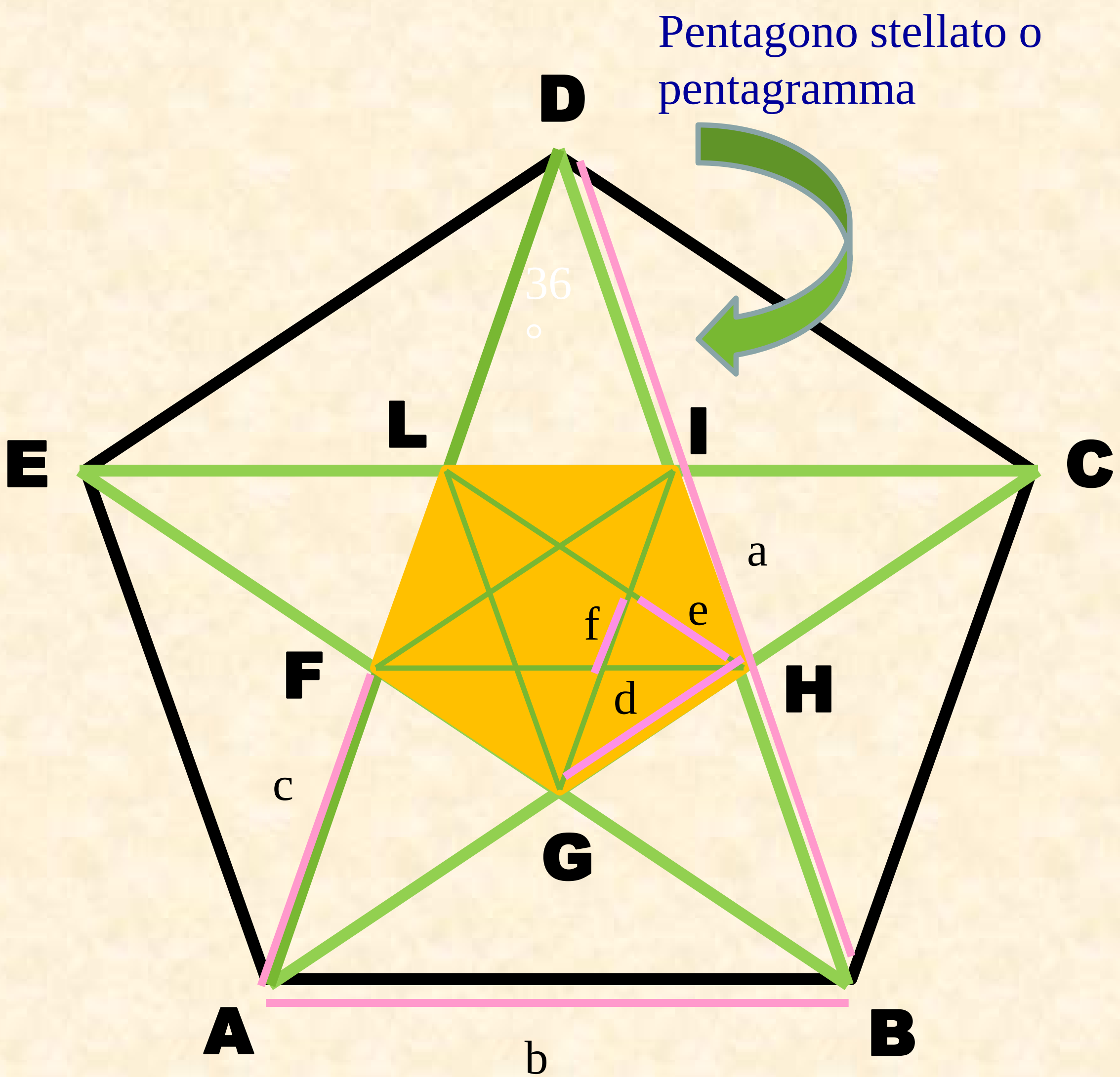
Il lato del decagono regolare è
la sezione aurea del raggio della
circonferenza circoscritta.

TRIANGOLO AUREO



E' un triangolo isoscele con l'angolo opposto alla base di 36° (la base è la sezione aurea del lato) o di 108° (il lato è la sezione aurea della base).

IL PENTAGONO REGOLARE



$a/b = \Phi$

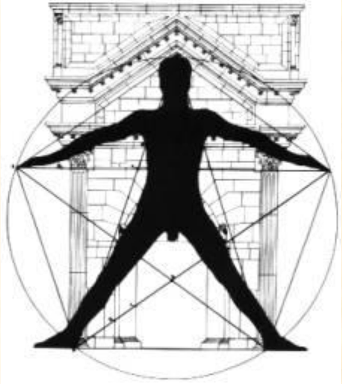
$b/c = \Phi$

$c/d = \Phi$

$d/e = \Phi$

$e/f = \Phi$

CASTEL DEL MONTE (1240 circa)



Il portale può essere visto come un **PENTAGONO STELLATO** che detta le proporzioni della costruzione, in esso si va a sistemare una figura umana.

Il timpano del portale è un triangolo isoscele in cui i lati sono sezione aurea della base.