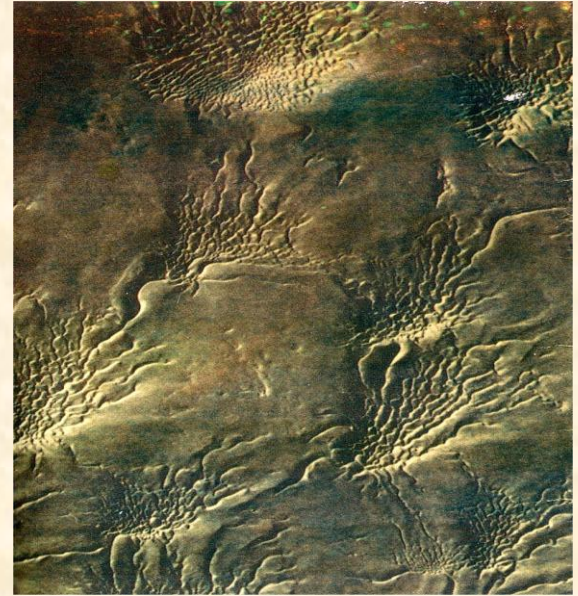


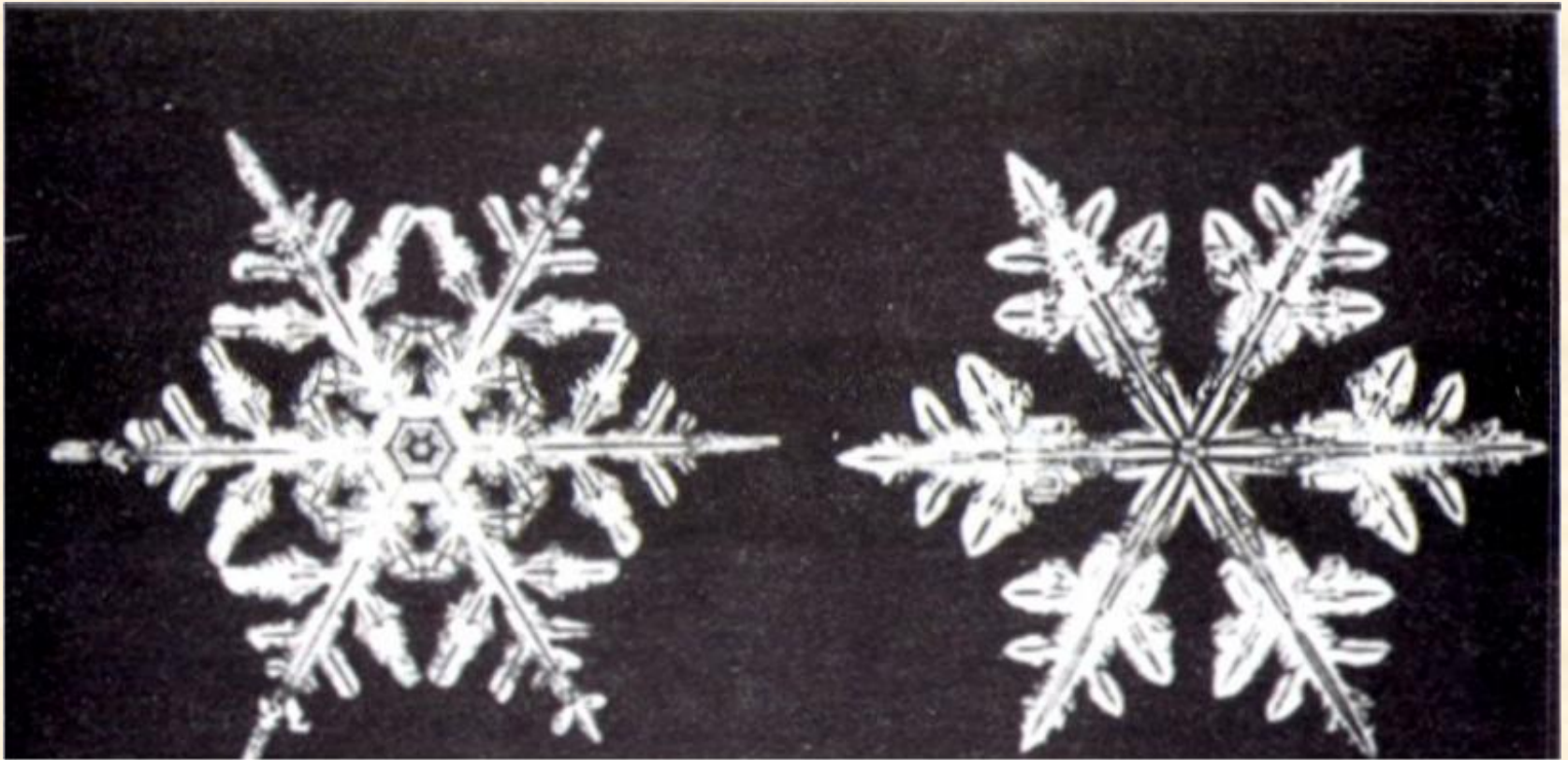
I FRATTALI

*Perchè la geometria viene spesso definita fredda e arida?
Uno dei motivi è la sua incapacità di descrivere la forma di una
nuvola, di una montagna, di una linea costiera, di un albero.
Osservando la natura vediamo che le montagne non sono dei coni,
le nuvole non solo delle sfere, le coste non sono dei cerchi, ma sono
oggetti geometricamente molto complessi.*

*Benoit Mandelbrot “**Gli oggetti frattali**”, 1975*

La geometria della natura

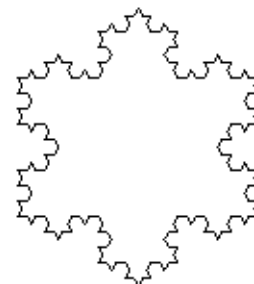
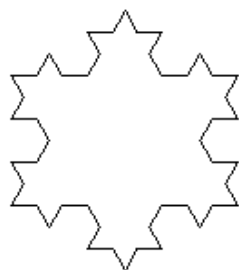
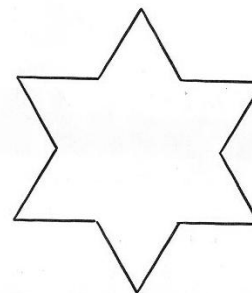
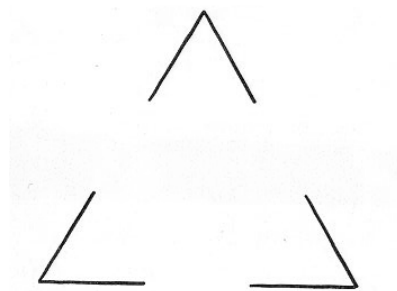
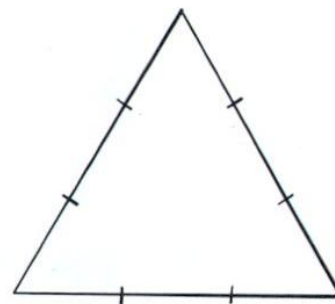
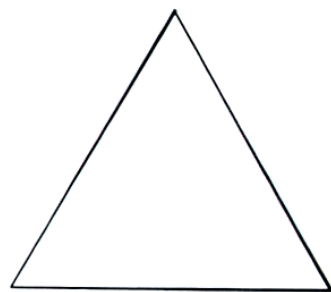




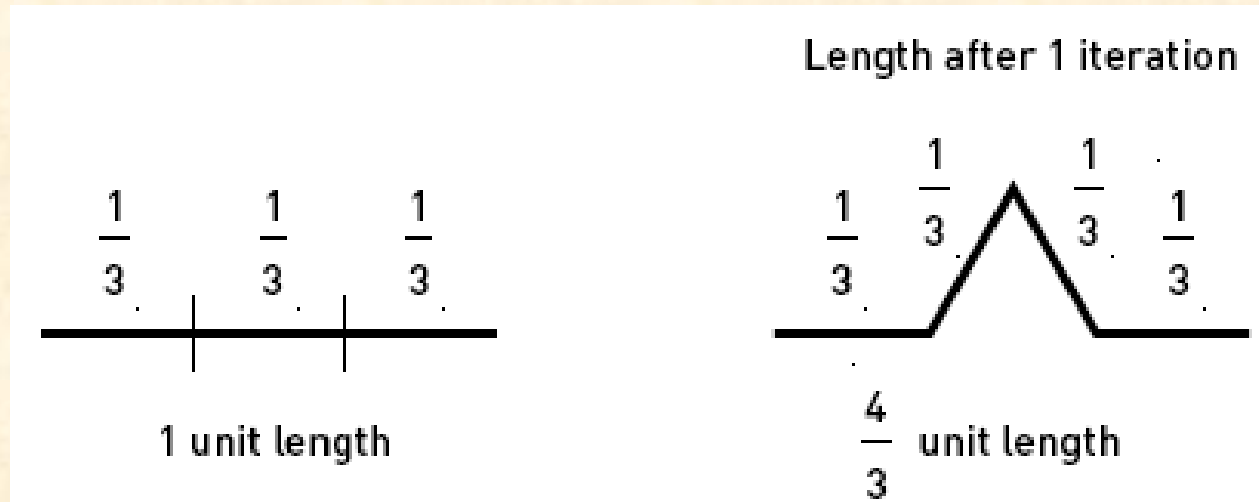
La ripetizione di forme sempre uguali è evidente anche in questi cristalli di neve visti al microscopio.

Proviamo a riprodurli con l'aiuto della geometria!

Costruzione del fiocco di neve frattale (curva di Koch)



...perimetro che cresce...



Iterazione 0: $\text{lungh} = 1$ metro

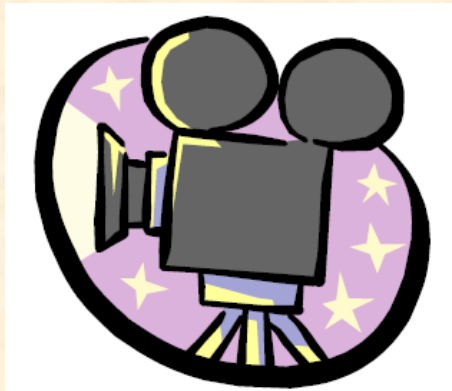
Iterazione 1: $\text{lungh} = \frac{4}{3} = 1.33$ metri

...calcolo più preciso...

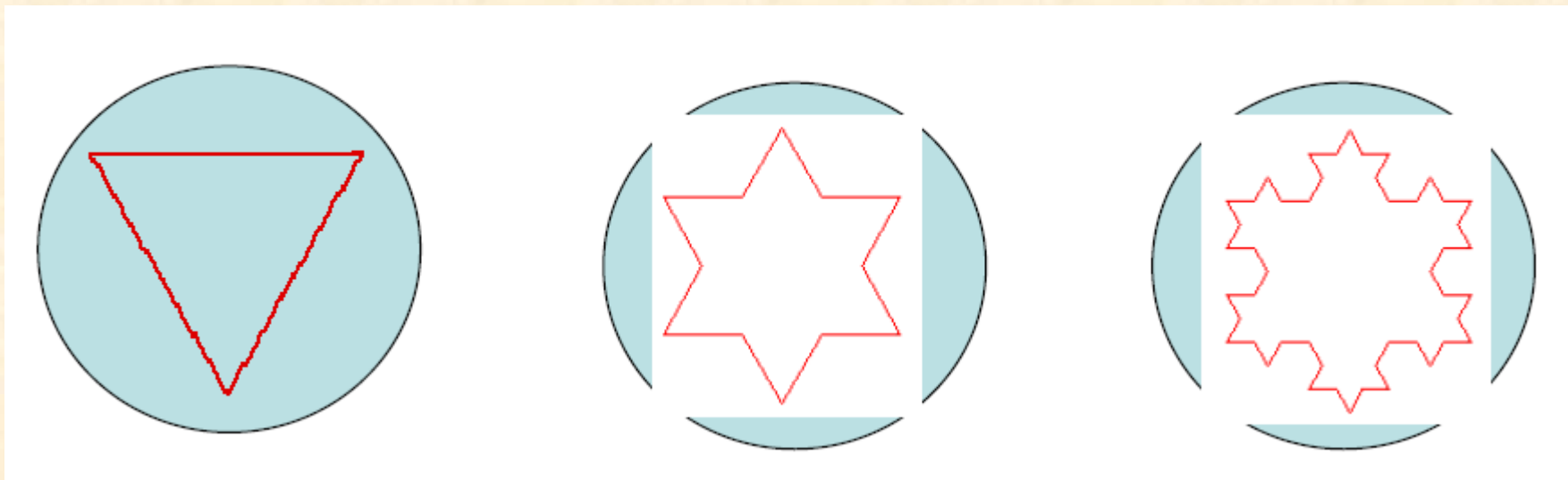
iterazione	num segmenti	lunghezza segm	perimetro
0	3	1 m	3 m
1	$4 \times 3 = 12$	$1/3$ m	$12/3 = 4$ m
2	$4 \times 12 = 48$	$1/9$ m	$48/9 \sim 5.3$ m
3	$4 \times 48 = 192$	$1/27$ m	$192/27 \sim 7.1$ m
4	$4 \times 192 = 768$	$1/81$ cm	$768/81 \sim 9.5$ m

Perimetro INFINITO !

Iterando la procedura tantissime volte, il PERIMETRO della curva diventa ENORME, grande quanto vogliamo, in matematica si dice INFINITO !



E L'AREA?



L'area e' sempre racchiusa da uno **STESSO CERCHIO** che circonda il triangolo di partenza.

Non importa quanto grande diventa il perimetro della curva, l'area dentro alla curva rimane dentro al cerchio, quindi e' piu' piccola dell'area del cerchio e quindi

L'AREA È FINITA!

Quanto è lunga la costa della Gran Bretagna ?



...dipende...



Unità = 200 km
Lunghezza = 2400 km

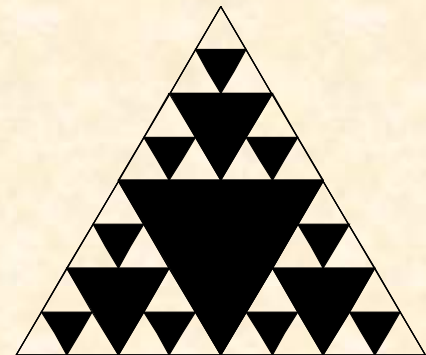
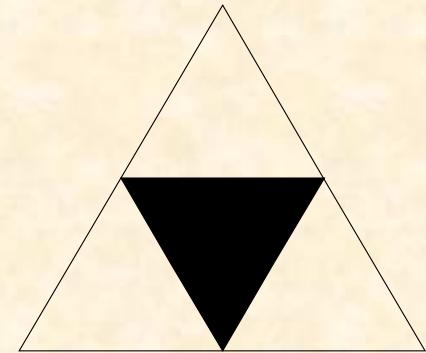
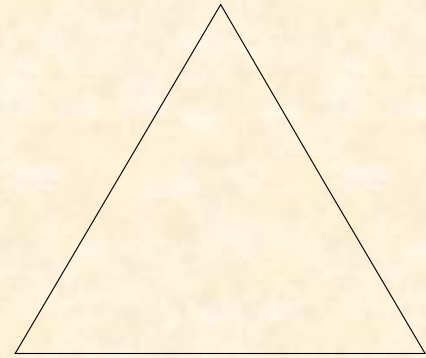
Unità = 100 km
Lunghezza = 2800 km

Unità = 50 km
Lunghezza = 3400 km

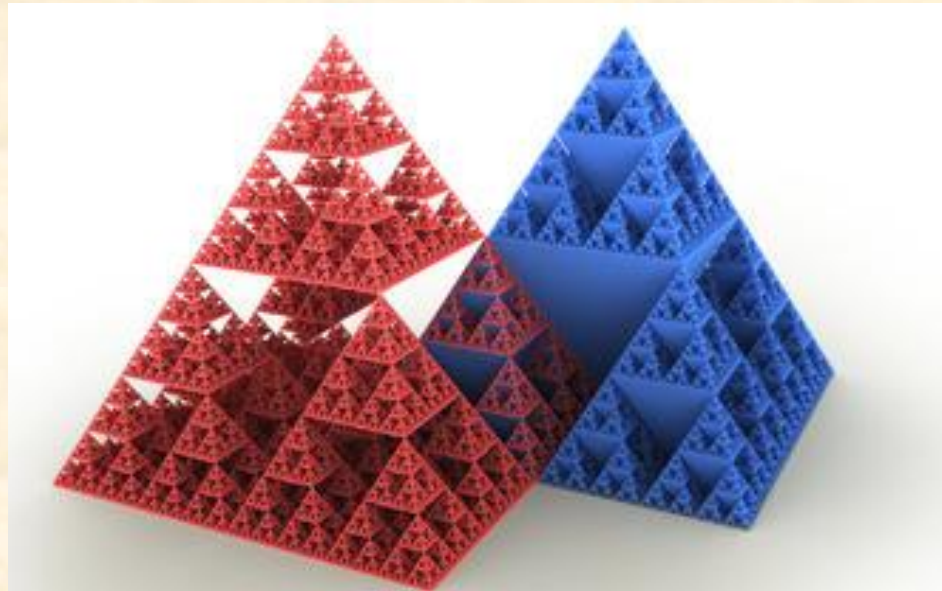
...dal tipo di metro che usiamo per misurare !

Costruzione gerla di Sierpinski

- Si parte da un triangolo equilatero
- Si sottrae al triangolo iniziale il triangolo avente come vertici i punti medi di ogni lato
- Si itera il procedimento per ogni nuovo triangolo ottenuto



Esempio di frattale in 3D



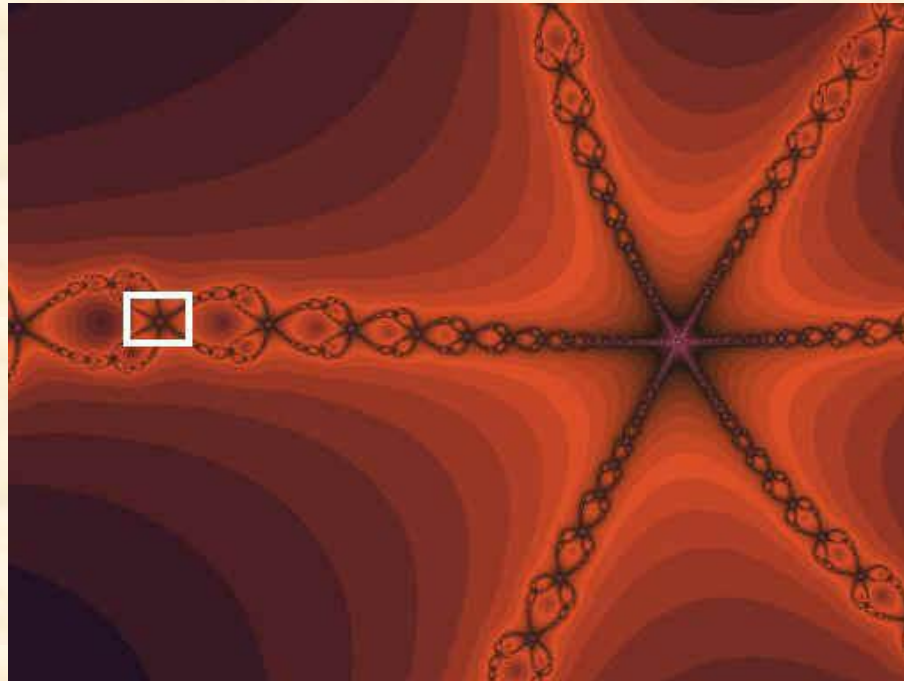
Definizione di frattale

“Figura geometrica o oggetto naturale con una parte della sua forma o struttura che si ripete a scala differente, con forma estremamente irregolare interrotta e frammentata a qualsiasi scala e con elementi distinti di molte dimensioni differenti”.

Benoit Mandelbrot (Gli oggetti frattali, 1975)

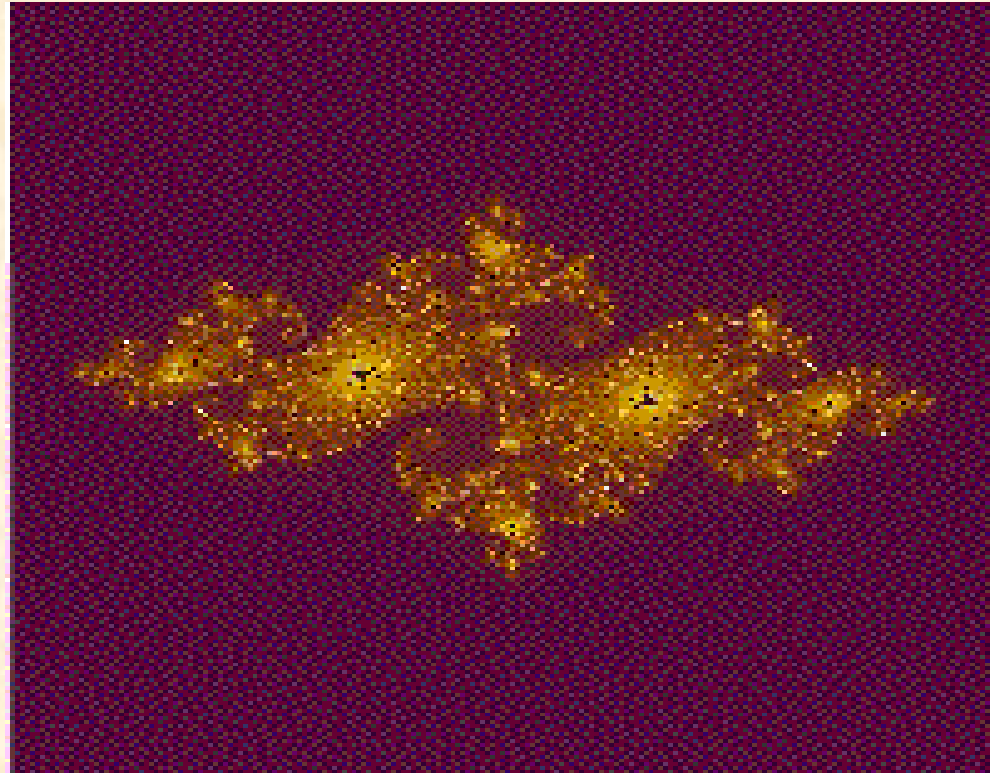
Proprietà dei frattali

+1) **AUTOSIMILARITA'** (o invarianza rispetto al cambiamento di scala)



Il frattale F è unione di un numero di parti che, ingrandite di un certo fattore, riproducono tutto F .

+2) Struttura fine



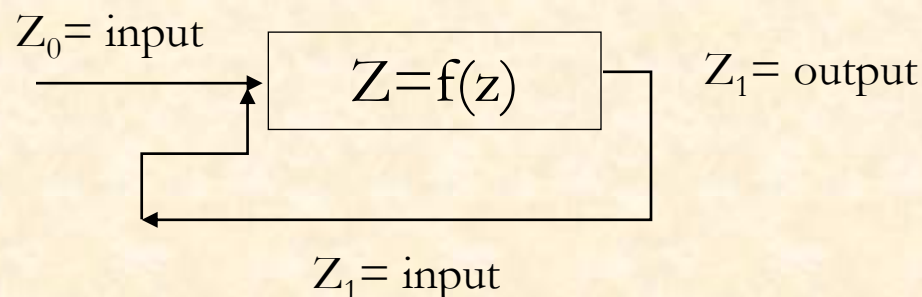
Il frattale rivela dettagli ad ogni ingrandimento.

■ **3) Irregolarità:** *il frattale non si può descrivere come luogo di punti che soddisfano semplici condizioni geometriche o analitiche.*

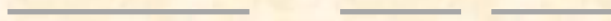
(la funzione è ricorsiva: $F = \{y \mid y = f(f(f(\dots)))\}$)

■ Funzione ricorsiva:

Applicata in modo ricorsivo, cioè ogni volta rimettendo in input, l'output del passo precedente:



+ 4) Dimensione frazionaria: *sebbene F possa essere rappresentata in uno spazio convenzionale a due o tre dimensioni, la sua dimensione non è intera.*



- Prendiamo un segmento: **DIMENSIONE = 1**

- Dividiamolo a metà (fattore di divisione $F_d = 1/2$)

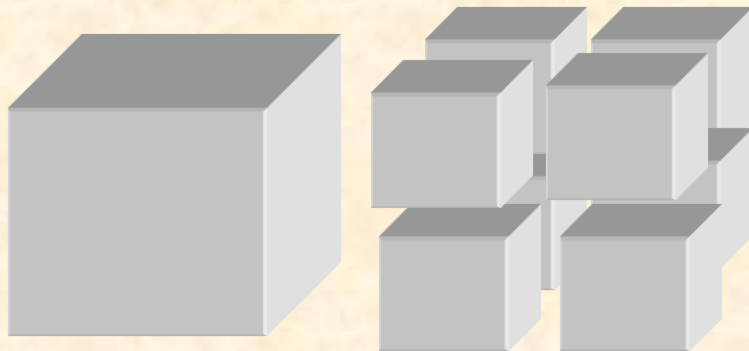
Ci vogliono 2 copie dello stesso segmento (2^1) per fare quello grande.



- Prendiamo un quadrato: **DIMENSIONE = 2**

- Dividiamo il lato a metà (fattore di divisione $F_d = 1/2$)

Ci vogliono 4 copie dello stesso quadrato (2^2) per fare quello grande.



- Prendiamo un cubo: **DIMENSIONE = 3**

- Dividiamo il lato a metà (fattore di divisione $F_d = 1/2$)

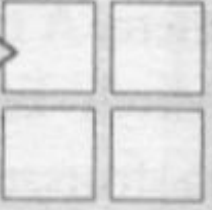
Ci vogliono 8 copie dello stesso cubo (2^3) per fare quello grande.

$$N_c = (1/F_d)^D$$

N_c = numero di copie; F_d = fattore di divisione; D = dimensione

Formula della dimensione

Esiste una relazione fra il fattore di divisione F_d il numero di oggetti prodotti N_c e la dimensione D di un oggetto

	Divisione per 2	numero di Sotto-oggetti	Divisione per 3	numero di Sotto-oggetti
LINEA	— — —	2 2 ¹	— — —	3 3 ¹
QUADRATO		4 2 ²		9 3 ²
CUBO		8 2 ³		27 3 ³

$$N_c = (1/F_d)^D$$



$$D = -\log N_c / \log F_d$$

Felix Hausdorff (1918)

Nel caso del cristallo di neve di Koch si passa da 3 a 4 segmenti.



$$1/f = 3$$

$$n = 4$$

Poiché:

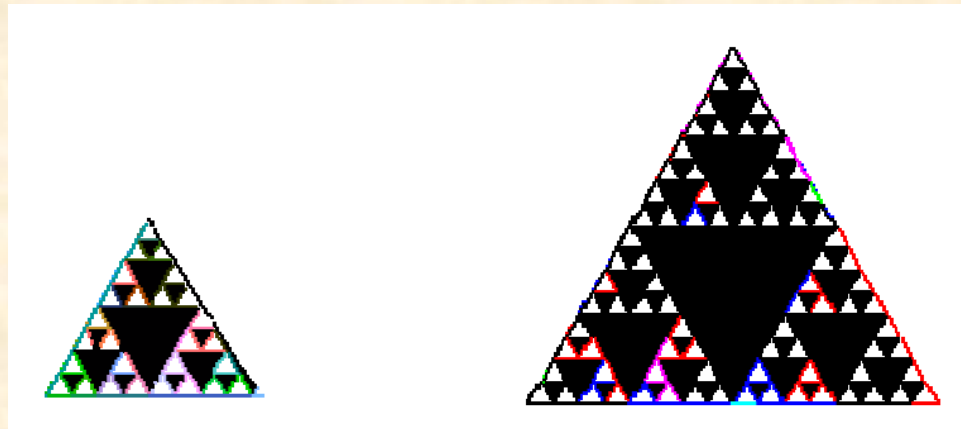
$$3^1 < 4 < 3^2$$



$$1 < D < 2$$

$$(D = \log 4 / \log 3 \sim 1,26)$$

Nel caso del triangolo di Sierpinski



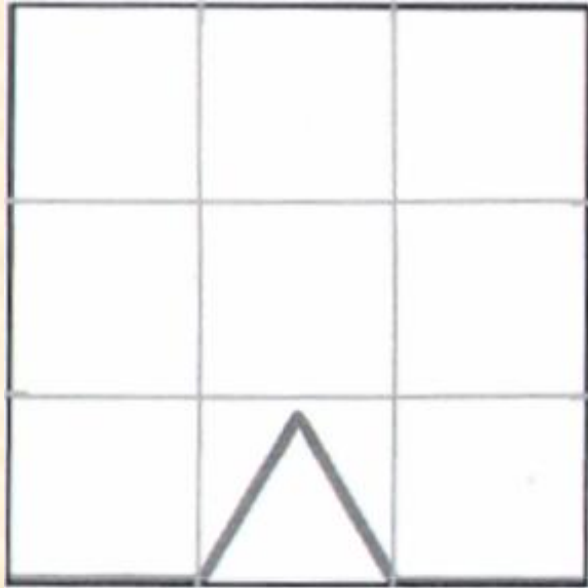
Dimezzando la lunghezza dei lati otteniamo 3 COPIE



$$D = \log 3 / \log 2 \sim 1,585$$

Calcolo approssimato della dimensione di una curva frattale

Si incornicia il frattale in una griglia e si valuta la porzione di maglie che esso ricopre.



Con la curva a fiocco di neve non si riesce a ricoprire un quadrato qualunque sia il numero di iterazioni eseguite.

Con questo procedimento si è scoperta la struttura frattale delle opere di un grande artista contemporaneo: Jackson Pollock.

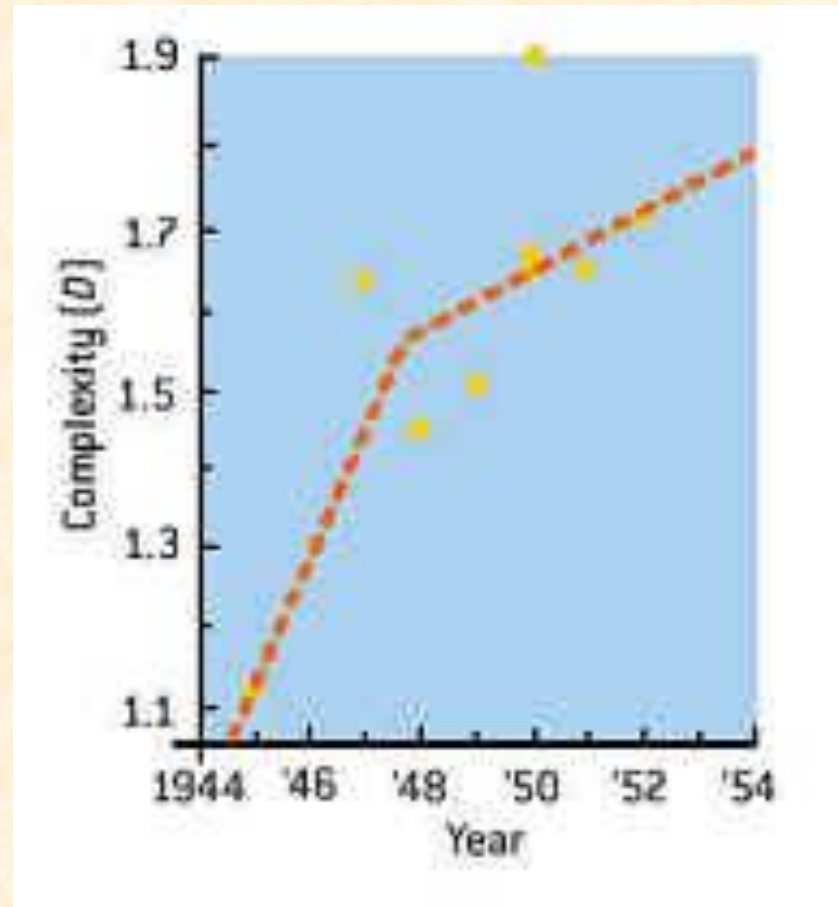
Scansionando al computer le celle del reticolo in cui venivano suddivise le tele di Pollock si scopre che:

**lo schema pittorico è invariante per variazioni
del passo reticolare**



***Blue Poles Number 11**, il capolavoro di Pollock del
1952, smalto e vernice ad alluminio su tela.*

Uno studio cronologico dei dipinti ha mostrato che la dimensione frattale D delle opere di Pollock si estende da 1,1 a 1,9 per stabilizzarsi attorno a 1,7

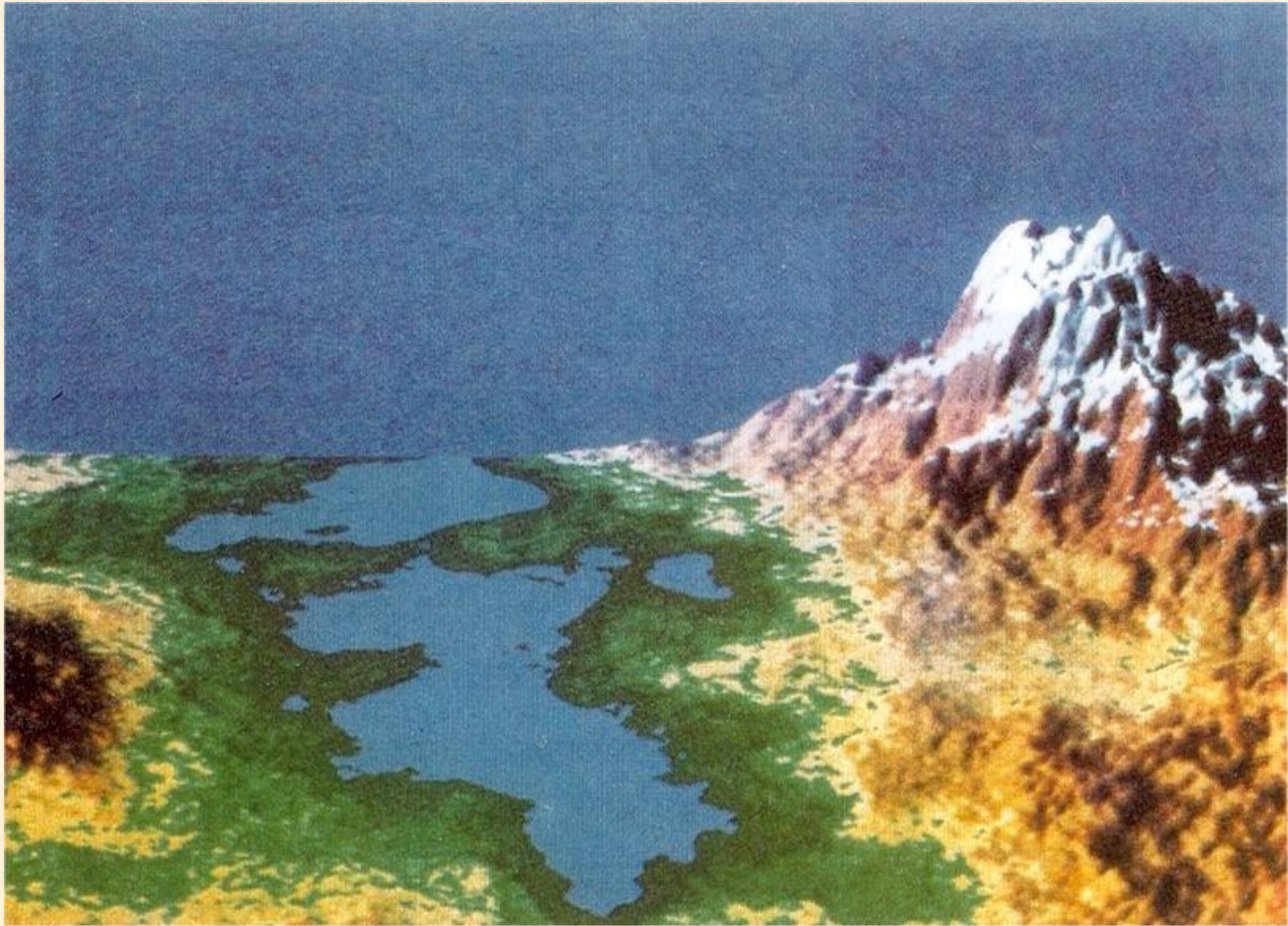


Salvador Dalí “Il volto della guerra” (1941)



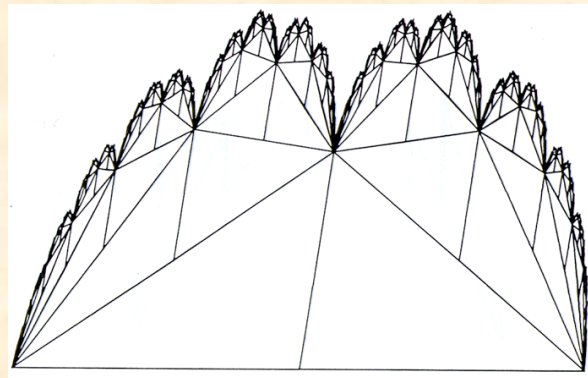
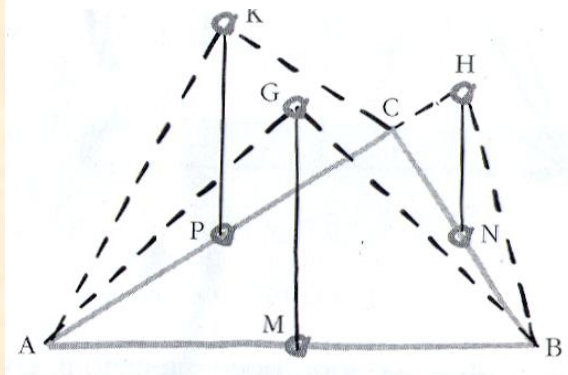
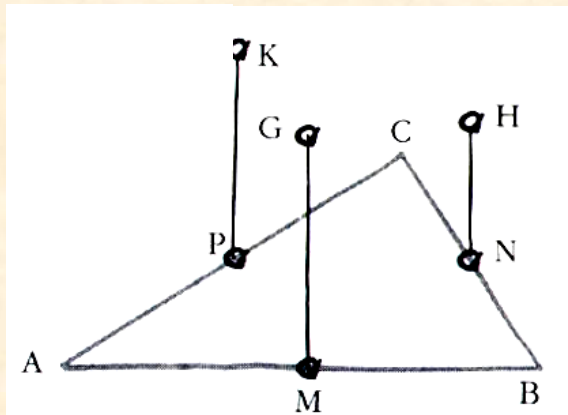
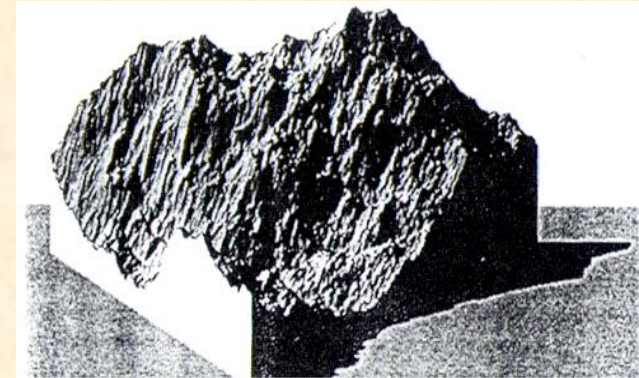
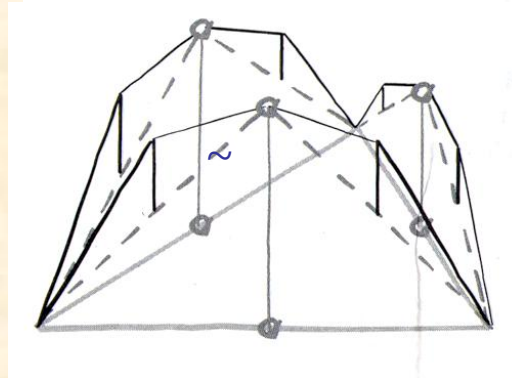
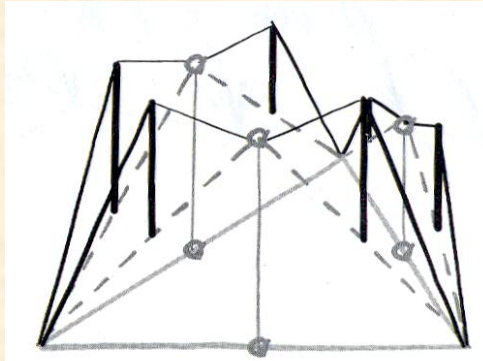
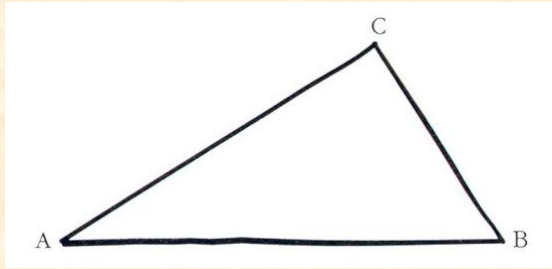
Anche questo dipinto mostra una struttura frattale di dimensione 1,7.

Frattali nella computer graphic



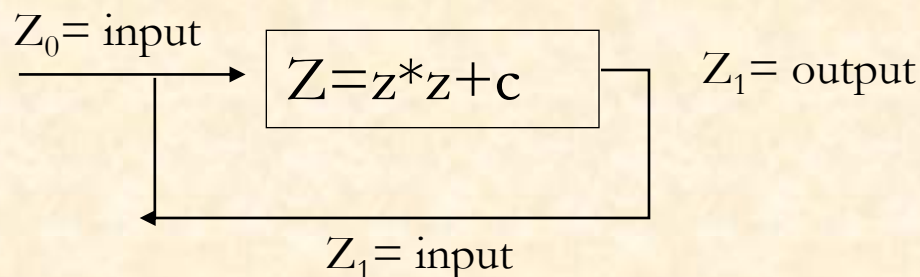
Paesaggio naturale costruito con il computer

Costruire una montagna



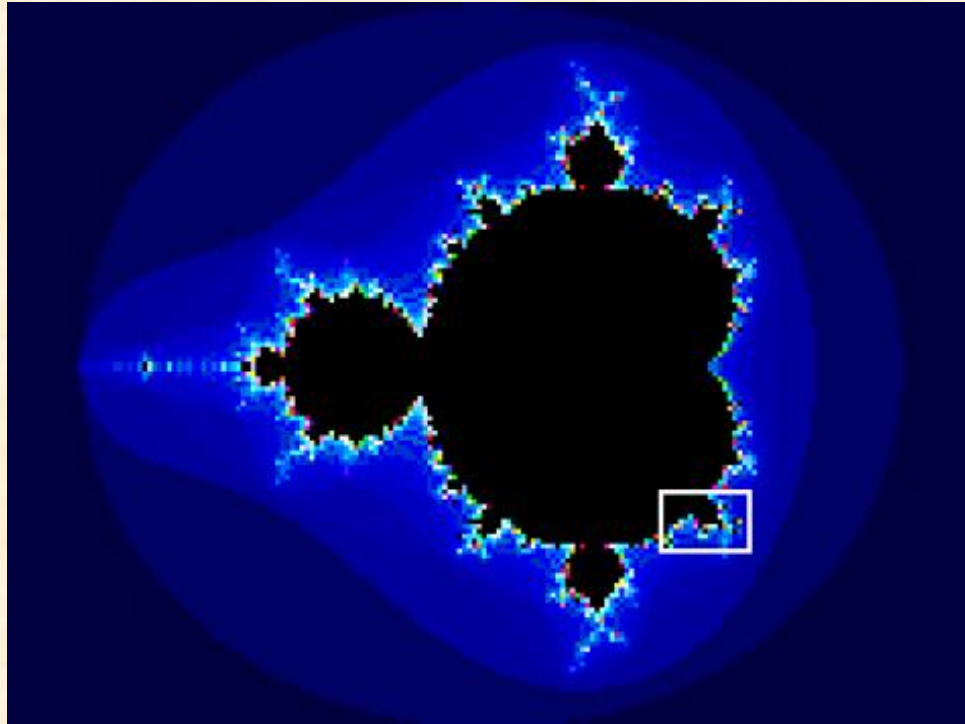
Frattale di Maldenbrot

- Si definisce come l'insieme dei numeri complessi c per i quali non è divergente la successione definita da $Z(n+1) = z^2(n) + c$ con $z(0)=0$.
- È applicata in modo ricorsivo, cioè ogni volta rimettendo in input, l'output del passo precedente:



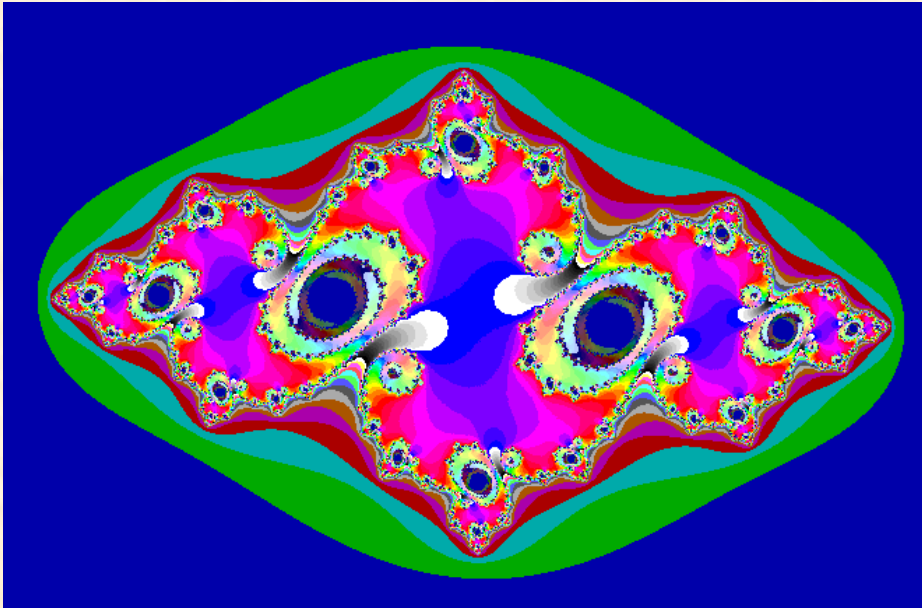
- Si contano quante iterazioni servono per ottenere il primo punto che esce da un quadrato di piano prefissato: n
- Si associa ad ogni n un colore diverso ed accendo il pixel di quel colore

Insieme di Mandelbrot

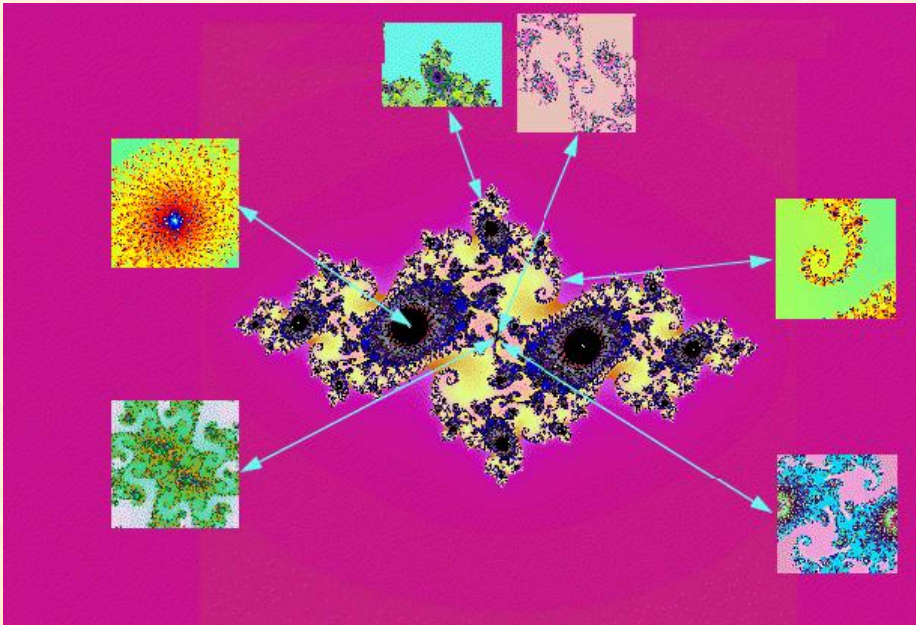


I punti dell'insieme sono quelli di colore nero all'interno della grossa cardioide mentre gli altri colori sono usati per indicare le diverse velocità con cui la successione diverge.

Insiemi di Julia



Insieme dei numeri complessi z per i quali non è divergente la successione definita da $Z(n+1) = z^2(n) + c$ con c costante complessa prefissata.



A CHE SERVONO I FRATTALI?

- 1) In medicina
- 2) Nelle antenne
- 3) Nei telefoni cellulari
- 4) Nelle previsioni del tempo
- 5) Nella realizzazione di effetti speciali in film e videogiochi

Per approfondire ...



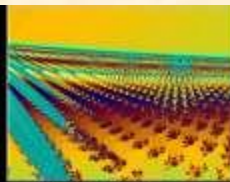
Creatività...in codice



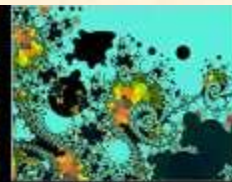
CRANK.GIF



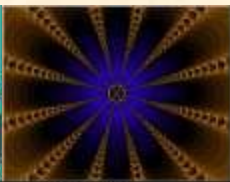
CREEPING.GIF



CXMKS003.GIF



CXMKS006.GIF



12_ORE.GIF



A033.GIF



ACYRL2.GIF



AGUAY_G.GIF



CXMKS009.GIF



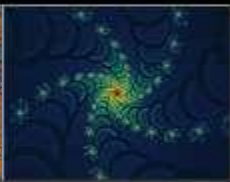
DEATH'S.GIF



DEMON.GIF



DINGLE.GIF



AGUAY_P.GIF



APE.GIF



APOLLO13.GIF



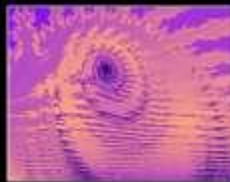
ARGYLE.GIF



DRAGON3.GIF



DROP.GIF



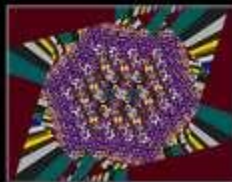
DRSTRANG.GIF



EIGHT.GIF



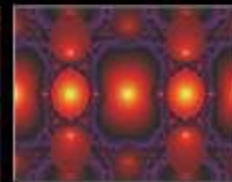
BARNMANH.GIF



BARNMANB.GIF



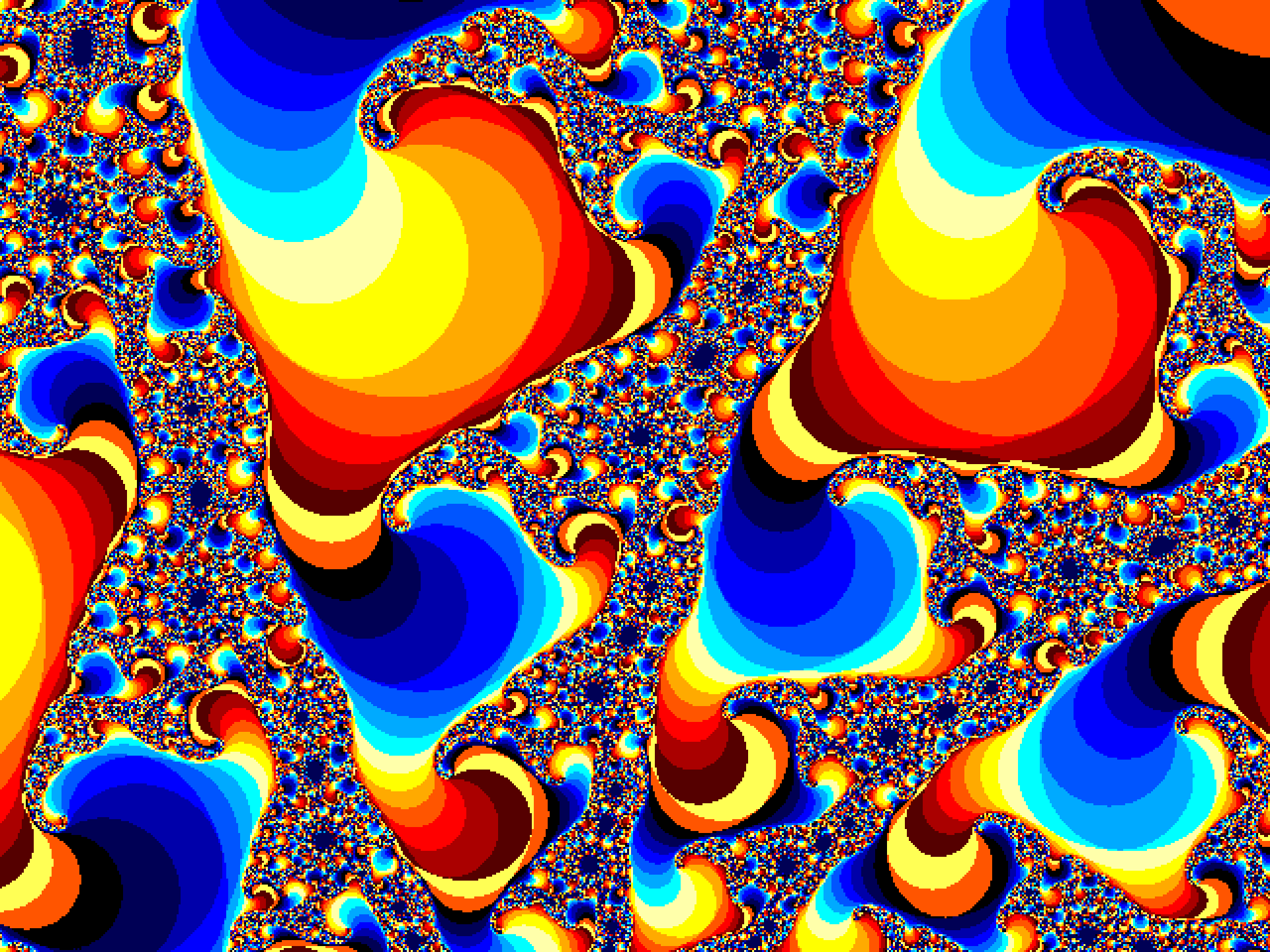
BAROQUE.GIF



BERRIES.GIF

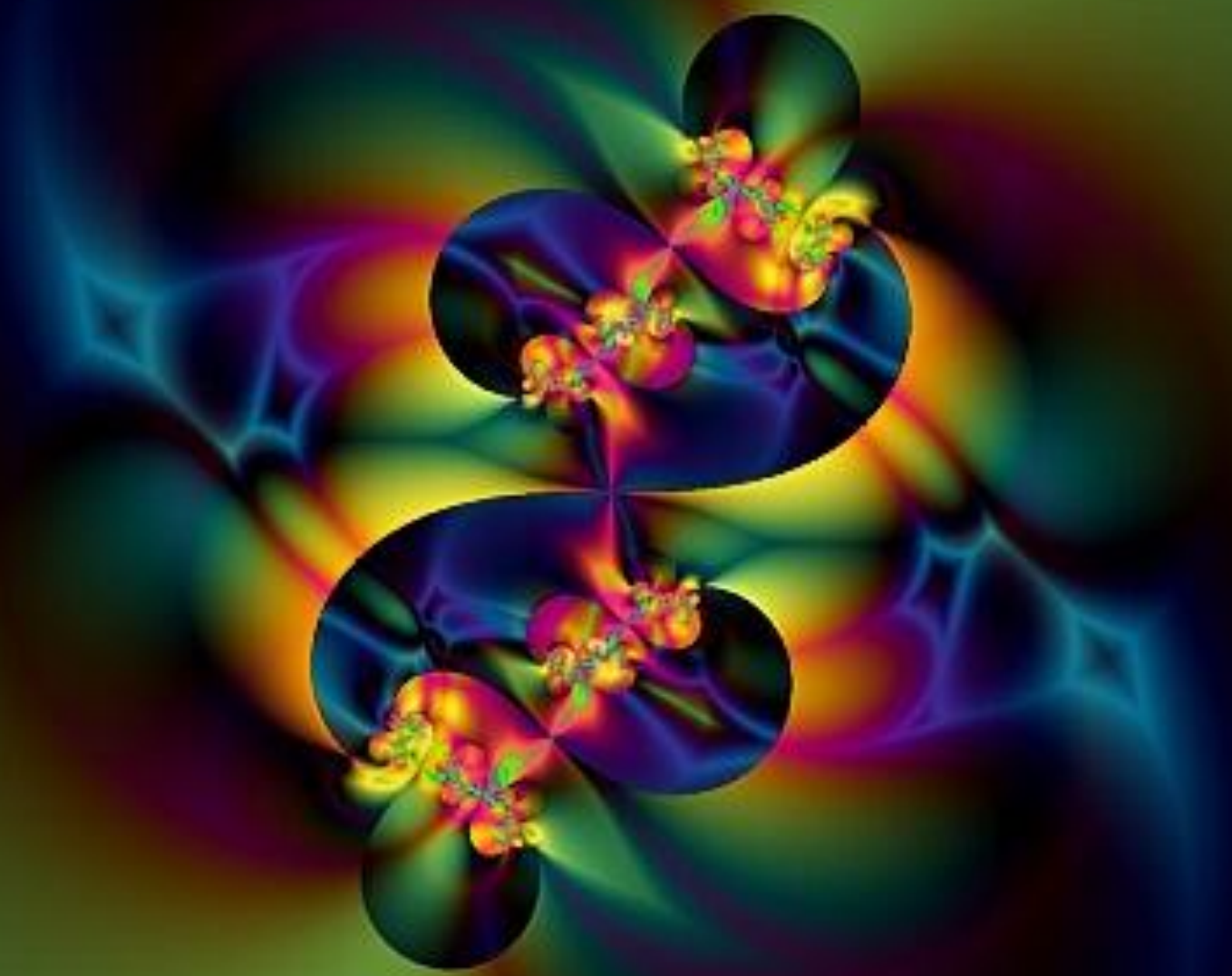








Copyright © Doug Harrington 2002



Copyright © Doug Harrington 2002

Geometrie frattali in pittura

Dalle immagini digitali contemporanee
di Elio Pastore

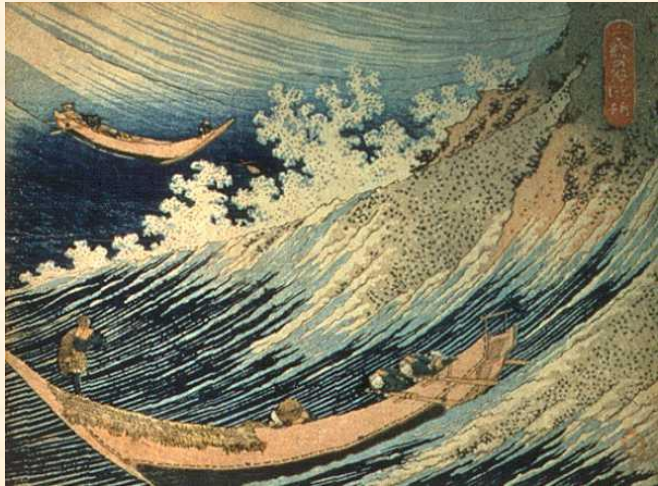


Caleidoscopio



Ninfea

... alle incisioni anticipatrici di Hokusaki del XIX sec.



da “Mille immagini del mare”



*“Poi un giorno il segno prende significato.
Quei riccioli di spuma come tanti artigli,
di cui mi ero sempre chiesto perché”*