



**2020:  
ODISSEA NEL  
TRIANGOLO**

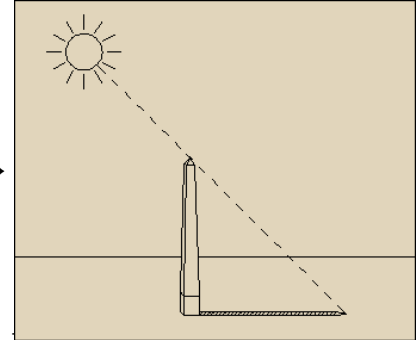
di Giorgia Ladisa, Claudia Lillo,  
Claudia Lopez e Micaela Perrini Campione

# ERATOSTENE: CALCOLO DEL RAGGIO TERRESTRE



- **Eratostene di Cirene** (276 - 194 a.C.), matematico, astronomo, filosofo e letterato greco, tutore del faraone Tolomeo IV e direttore della **Biblioteca di Alessandria**.
- Servendosi solo di uno **gnomóne**<sup>1</sup> e di conoscenze geometriche e trigonometriche calcolò la misura del raggio terrestre.

esempio di gnomóne →



<sup>1</sup>**gnomóne**: s. m. [dal lat. *gnomon* -*ōnis*, gr. γνῶμων -ονος, dal tema di γινώσκω «conoscere»]

strumento rudimentale, costituito da un'asta disposta verticalmente su un terreno perfettamente pianeggiante, per misurare l'altezza del Sole sull'orizzonte e per determinare l'istante del mezzogiorno locale.

# ERATOSTENE: CALCOLO DEL RAGGIO TERRESTRE

## DATI:

- A **Siene** (l'odierna Assuan) a mezzogiorno del solstizio d'estate **il Sole si trova allo Zenit** e le ombre si annullano; ad Alessandria ciò non succede.
- Distanza Alessandria - Siene: **5.000 stadi**  $\approx$  800 km.
- Le due città si trovano sul medesimo meridiano<sup>1</sup>.
- **La Terra è sferica.**
- Il Sole è tanto distante dalla Terra che i suoi raggi vi giungono paralleli.

<sup>1</sup>In realtà le due città sono separate da 3° di longitudine.



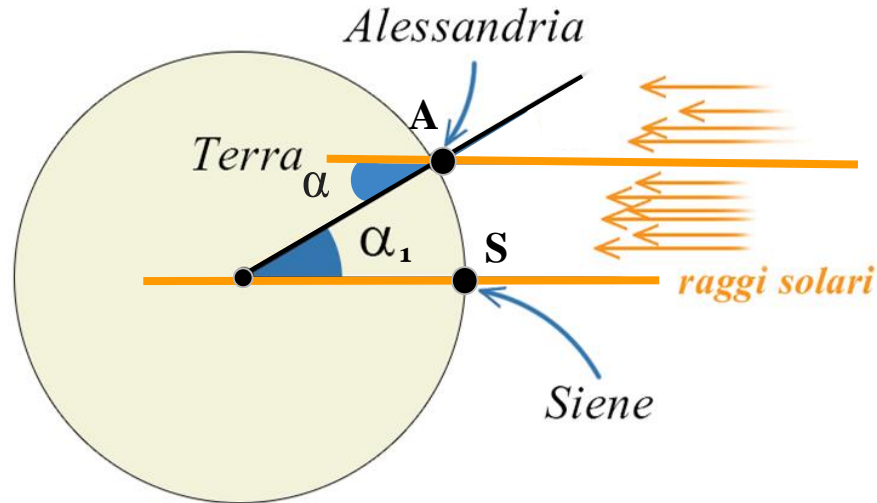
Le città di Alessandria e Siene (Assuan) si trovano quasi sullo stesso meridiano, cioè alla stessa longitudine, a 800 km di distanza.

# ERATOSTENE: CALCOLO DEL RAGGIO TERRESTRE

## BASI GEOMETRICHE:

- Due rette parallele tagliate da una trasversale formano angoli alterni interni congruenti.
- Gli archi di circonferenza sono proporzionali ai rispettivi angoli al centro.

dunque:  
 $\alpha \cong \alpha_1$   
 $AS \propto \alpha_1$



# ERATOSTENE: CALCOLO DEL RAGGIO TERRESTRE

Calcolo di  $\alpha$  (**angolo di elevazione del Sole**) tramite l'applicazione del **secondo teorema dei triangoli rettangoli**.

- $l$  = ombra proiettata dallo gnómonone  $\rightarrow$  cateto maggiore
- $h$  = altezza dello gnómonone  $\rightarrow$  cateto minore

$$l = h \cdot \tan\alpha; \tan\alpha = l/h; \alpha = \arctan(l/h).$$



# ERATOSTENE: CALCOLO DEL RAGGIO TERRESTRE

Calcolo di **r** (**raggio terrestre**):

circonferenza terrestre : angolo giro = distanza Alessandria - Siene : angolo  $\alpha$

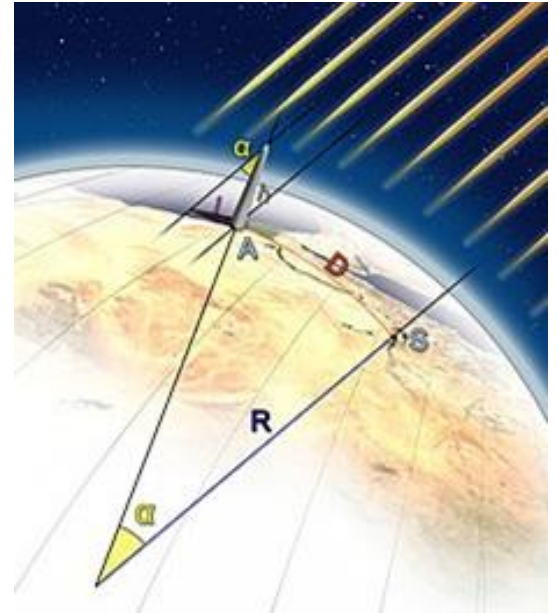
↓↓

$$2\pi r : 360^\circ = AS : \alpha$$

↓↓

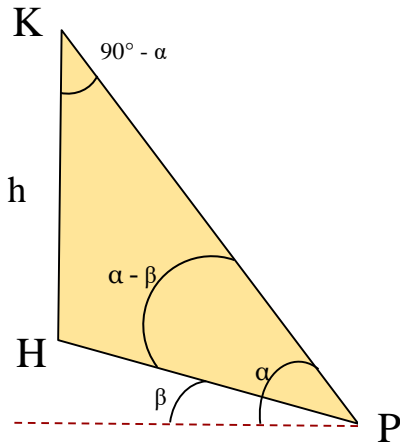
$$r = (360^\circ \cdot AS) / 2\pi \arctan(l/h)$$

$$r = 6314,5 \text{ km}^1$$



<sup>1</sup>La misura reale del raggio terrestre è di 6371 km.

# ALTEZZA DI UN EDIFICIO ACCESSIBILE LA CUI BASE E' SOPRA IL PIANO DELL'OSSERVATORE



**P** = punto dell'osservatore

**PH** = distanza dal punto dell'osservatore all'edificio (**d**)

**h** (altezza edificio) = ?

Per trovare l'altezza applico il **Teorema dei seni**:

$$\frac{h}{\sin(\alpha - \beta)} = \frac{d}{\sin(90^\circ - \alpha)} ; h = d \cdot \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos \alpha}$$

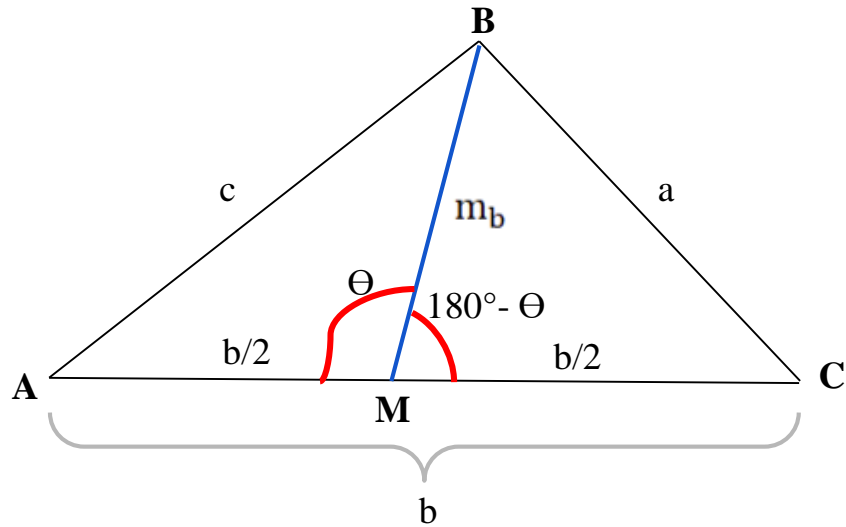
angolo che si oppone ad **h**

angolo che si oppone a **d**

# CALCOLO DELLA LUNGHEZZA DELLE MEDIANE DI UN TRIANGOLO

**DEFINIZIONE:** si definisce **MEDIANA** di un triangolo, il segmento che congiunge un vertice con il punto medio del lato ad esso opposto.

Applicando il **TEOREMA DI CARNOT** ci proponiamo di calcolare la misura delle mediane noti i lati del triangolo:



DATI:

$$\triangleright \overline{AB} = c$$

$$\overline{BC} = a$$

$$\overline{AC} = b$$

$$\widehat{AMB} = \theta$$

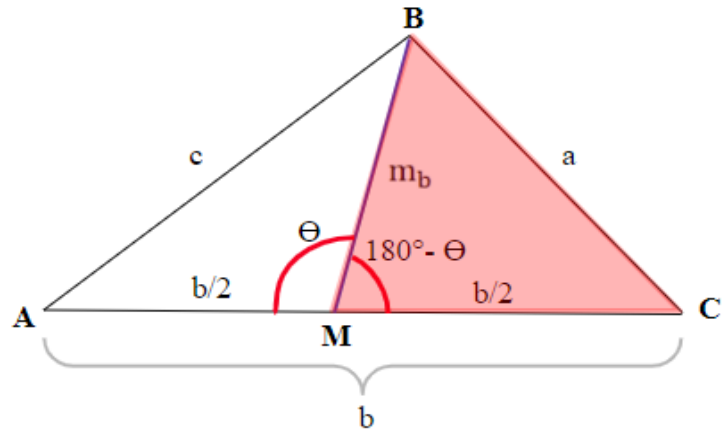
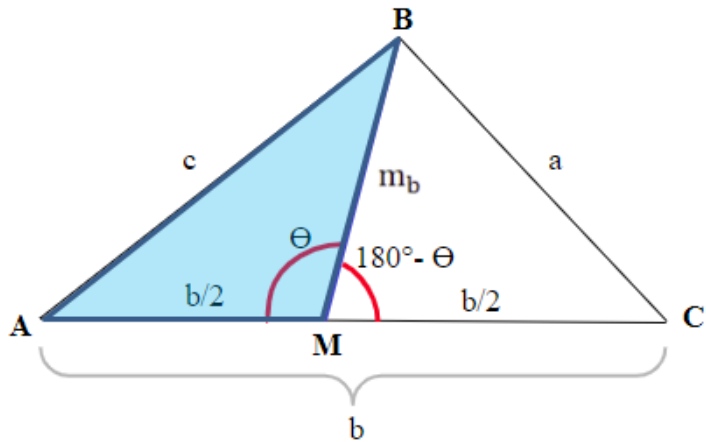
$$\triangleright \widehat{BMC} = 180^\circ - \theta$$

DA DETERMINARE:

$$\overline{BM} = m_b$$



# CALCOLO DELLA LUNGHEZZA DELLE MEDIANE DI UN TRIANGOLO



Applico il **teorema di Carnot** al triangolo  $\widehat{AMB}$  :

$$c^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + m_b^2 - 2\frac{b}{2} m_b \cos \theta \quad (1)$$

Applico il medesimo teorema al triangolo  $\widehat{BMC}$  :

$$a^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + m_b^2 - 2\frac{b}{2} m_b \cos(180^\circ - \theta) \quad (2)$$

Gli angoli  $\theta$  e  $180^\circ - \theta$  sono supplementari per cui:

$\cos(180^\circ - \theta) = -\cos\theta$  che sostituito nella (2) mi dà:

$$a^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + m_b^2 + 2\frac{b}{2} m_b \cos \theta \quad (3)$$

Sommo la (1) e la (3) membro a membro:

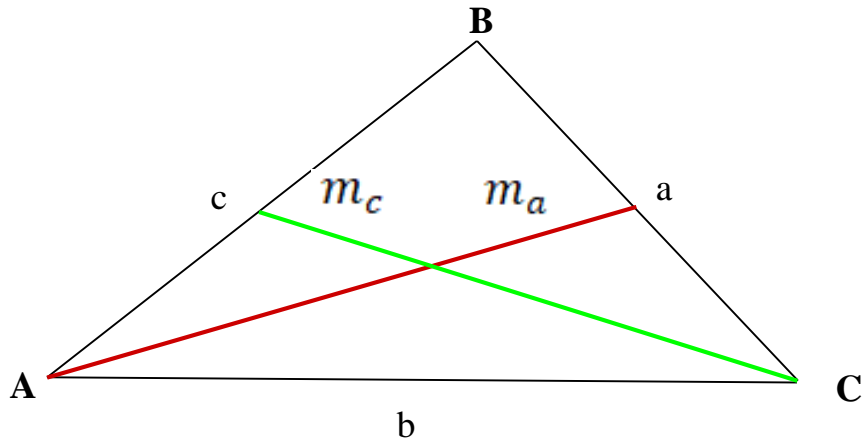
$$a^2 + c^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 + 2m_b^2 - 2\frac{b}{2} m_b \cos \theta + 2\frac{b}{2} m_b \cos \theta \Rightarrow$$

$$a^2 + c^2 = \frac{b^2}{4} + \frac{b^2}{4} + 2m_b^2 \Rightarrow a^2 + c^2 = \frac{b^2}{2} + 2m_b^2 \Rightarrow$$

# CALCOLO DELLA LUNGHEZZA DELLE MEDIANE DI UN TRIANGOLO

$$2m_b^2 = a^2 + c^2 - \frac{b^2}{2} \Rightarrow 4m_b^2 = 2a^2 + 2c^2 - b^2 \Rightarrow m_b = \frac{1}{2} \sqrt{2a^2 + 2c^2 - b^2}$$

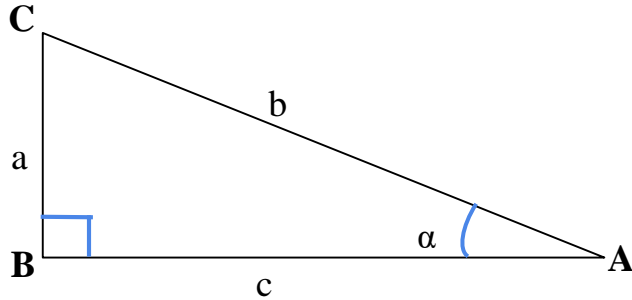
Analogamente si possono calcolare le altre 2 mediane:



$$m_a = \frac{1}{2} \sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$$

$$m_c = \frac{1}{2} \sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}$$

# LA PENDENZA DI UNA STRADA

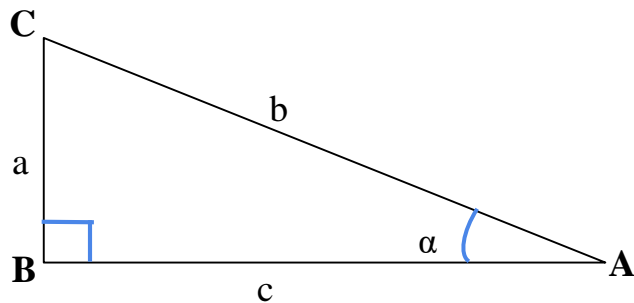


Con il termine **pendenza stradale** ( $P_s$ ) si indica il grado di ripidità o di inclinazione di una strada.

Essa è per definizione il rapporto tra il **dislivello a** e la **distanza inclinata b**.

Dunque,  $P_s = a/b$

# LA PENDENZA DI UNA STRADA



- Notiamo subito, però, come il dislivello non sia altro che un cateto e la distanza inclinata, l'ipotenusa.
- Applicando il **primo teorema dei triangoli rettangoli**, secondo il quale in un triangolo rettangolo la misura di un cateto è data dal prodotto della misura dell'ipotenusa per il seno dell'angolo opposto al cateto, scopriamo che la pendenza stradale corrisponde al seno dell'angolo  $\alpha^1$ .

$$a = b \cdot \sin \alpha; \quad \sin \alpha = a/b \Rightarrow P_s = \sin \alpha$$

<sup>1</sup>La **pendenza topografica** ( $P_t$ ) è, invece, il rapporto tra il **dislivello**  $a$  e la **distanza orizzontale**  $c$  (rispettivamente cateto minore e maggiore del triangolo ABC) e corrisponde dunque alla tangente dell'angolo  $\alpha$  per il **secondo teorema dei triangoli rettangoli**.

# SITOGRAFIA-BIBLIOGRAFIA

- Calcolo del Raggio Terrestre: [www.liceisgv.it/docenti/baldi](http://www.liceisgv.it/docenti/baldi) - Creative Commons (by-nc) Gabriele Baldi; [www.roma1.infn.it/exp/webmqc/I1%20metodo%20di%20Eratostene.pdf](http://www.roma1.infn.it/exp/webmqc/I1%20metodo%20di%20Eratostene.pdf); [ebook.scuola.zanichelli.it/amaldiraiettorie/volume-1/la-misura/eratostene-misura-il-raggio-terrestre](http://ebook.scuola.zanichelli.it/amaldiraiettorie/volume-1/la-misura/eratostene-misura-il-raggio-terrestre).
- Altezza di un edificio: [https://www.youtube.com/watch?v=11\\_kZ9SvP1w](https://www.youtube.com/watch?v=11_kZ9SvP1w).
- Calcolo della lunghezza delle mediane: R.FERRAUTO, *Lezioni di trigonometria piana*, Città di Castello (PE), 1974.
- La pendenza di una strada: <https://youtu.be/l2ksRgJ1dlU>.